Prøveeksamen 2 i MAT1100, H2017

Her er en prøveeksamen til for å vise formatet på årets eksamen. Oppgavesettet er satt sammen av oppgaver fra tidligere eksamener og er ikke skreddersydd for årets opplegg.

Oppgave 1. Funksjonen

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

er definert for $x \neq 0$.

a) Regn ut gradienten $\nabla f(x, y)$.

b) I hvilken retning vokser funksjonen raskest i punktet $\mathbf{a} = (x, y)$? I hvilke retninger er den retningsderiverte lik 0 i dette punktet?

Oppgave 2. Vis at funksjonen $f(x) = x^3 + 2x + 4$ er injektiv og har en omvendt funksjon g. Finn $g'(4)$.

Oppgave 3. Området under grafen til funksjonen $f(x) = \arctan x$, $0 \leq x \leq 1$, dreies om y-aksen. Finn volumet til omdreiningslegemet.

Oppgave 4. Et bilutleiefirma har kontor i tre byer A, B og C. Du kan levere tilbake en bil i hvilken by du vil uavhengig av hvor du har leid den. Undersøkelser viser at av de bilene som blir leid i A, blir 60% levert tilbake i A, 30% i B og 10% i C. Av de bilene som blir leid i B, blir 30% levert tilbake i A, 50% i B og 20% i C. Av de bilene som blir leid i C, blir 60% levert tilbake i A, 10% i B og 30% i C.

a) La x_0, y_0, z_0 være antall biler som var i henholdsvis A, B og C siste gang de ble leid ut, og la

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Finn en matrise M slik at komponentene til vektoren $\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0$ angir hvor mange av bilene som blir levert inn i henholdsvis A, B og C. Finn $\mathbf{r}_1$ dersom

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

b) Firmaet har ialt 120 biler til utleie. Finn en fordeling av bilene i de tre byene slik at det i hver by leveres tilbake like mange biler som det ble leid ut.

Oppgave 5. I denne oppgaven er $P(x) = x^3 - 2x + 4$,

a) Vis at -2 er en rot i $P(x)$. Finn den reelle faktoriseringen til $P(x)$.

b) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{3x^2 + 8}{x^3 - 2x + 4} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}$$

c) Løs integralet $\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\, dx$

Oppgave 6. Avgjør om integralet

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 7. Hva er volumet til den største sylinderen som kan plasseres inni en kule med radius R?

Oppgave 8. I denne oppgaven er $f, g \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ to kontinuerlige funksjoner, og vi antar i tillegg at $g(x) > 0$ for alle $x \in [0, \infty)$. Vis at dersom funksjonen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

er strengt voksende, så er også funksjonen

$$H(x) = \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{\int_0^x g(t)\, dt} \qquad x > 0$$

strengt voksende.

Hint: Sett $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ og $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$, og finn først $H'(x)$ uttrykt ved $F(x)$, $G(x)$, $f(x)$ og $g(x)$. Du kan få bruk for dette resultatet fra *Kalkulus*:

Cauchys middelverdisetning: Anta at $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Dersom $G(b) \neq G(a)$, finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

(Vi kan få en formel som også gjelder når $G(b) = G(a)$ ved å bruke den litt mindre oversiktlige skrivemåten $(F(b) - F(a))G'(c) = (G(b) - G(a))F'(c)$.)

SLUTT