Kortfattet løsningsforslag til prøveeksamen 2 i MAT1100, H2017

En del av oppgavene er hentet fra eksamen 2006, og fasit på disse finner du her.

Oppgave 1. a) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

b) Dette betyr at

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$$

Dette betyr at funksjonen vokser raskest i retningen $(-y,x)$ (normalt på stedsvektoren $\mathbf{a} = (x,y)$). Stigningen er null i retninger normalt på gradienten, dvs. i retningene $\pm(x,y)$.

Oppgave 2. Siden $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ for alle x, er funksjonen strengt voksende og dermed injektiv. Følgelig har den en omvendt funksjon g. Vi ser at $f(0) = 4$, og dermed er

$$g'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Oppgave 3. Ifølge formelen for volumet til et omdreiningslegeme om y-aksen er $V = 2\pi\int_0^1 x\arctan x\,dx$. Bruker vi delvis integrasjon med $u = \arctan x$, $v' = x$, får vi $u' = \frac{1}{1+x^2}$ og $v = \frac{x^2}{2}$. Dermed er

$$\int_0^1 x\arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Dette betyr at

$$V = 2\pi\int_0^1 x\arctan x\,dx = \frac{\pi^2}{2} - \pi$$

Oppgave 4. Se oppgave 2 på del 2 av eksamen 2006.

Oppgave 5. Se oppgave 1 i del 2 eksamen 2006 (punkt a) er litt endret på prøveeksamen for å unngå spekulasjon rundt komplekse tall).

Oppgave 6. Vi må undersøke

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

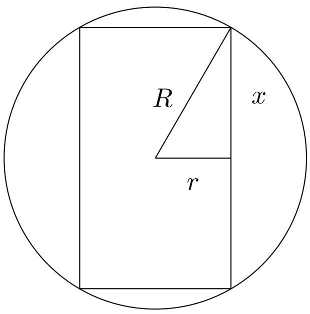
Innfører vi en ny variabel $u = \ln x$, er $du = \frac{1}{x}\,dx$, og vi får

$$\int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{u}\,du = \Big[\ln u\Big]_{\ln 2}^{\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)$$

Når $b \to \infty$, vil $\ln b \to \infty$ og dermed $\ln(\ln b) \to \infty$. Dette viser at integralet divergerer.

Oppgave 7. Figuren viser et snitt gjennom kulen med sylinderen stående på høykant. Vi ser at dersom x er halve høyden til sylinderen, så er radien r til sylinderen gitt ved $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Volumet er dermed

$$V(x) = \pi r^2 h = \pi(\sqrt{R^2-x^2})^2(2x) = 2\pi x(R^2 - x^2) = 2\pi(R^2x - x^3)$$



Deriverer vi dette uttrykket, får vi

$$V'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2)$$

som er 0 når $x = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. Det er lett å se at dette er et maksimumspunkt for V. Det største volumet er derfor

$$V_{maks} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\right) = 2\pi\left(R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}R - (\frac{\sqrt{3}}{3}R)^3\right) = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$$

Oppgave 8. Se oppgave 4 i del 2 av eksamen 2006.

SLUTT