FORMELSAMLING FOR MAT 1100 OG MAT-INF 1100

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a\ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$
Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$
De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Anvendelser av integrasjon

Volum av omdreiningslegemer: om x-aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$

om y-aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$

Buelengde: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

Lineær algebra og funksjoner av flere variable

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$

Differens- og differensialligninger

Annenordens differensligning $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$:

$$x_n = \begin{cases} C r_1^n + D r_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ C r^n + D n r^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C \rho^n \cos(n\theta) + D \rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

Annenordens differensialligning $y'' + p y' + q y = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} C e^{r_1 x} + D e^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ C e^{rx} + D x e^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ C e^{ax} \cos(bx) + D e^{ax} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Numeriske formler

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Trapesmetoden: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$

$+ 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$

Simpsons formel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$

$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)$

Eulers metode: Førsteordens ligning: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Annenordens ligning:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + h D y_{n-1} \\ D y_n = D y_{n-1} + h g(x_{n-1}, y_{n-1}, D y_{n-1}) \end{cases}$$