Nini Trinh Nguyen

MAT1100 - Obligatorisk oppgave 1

1. $z = \dfrac{6}{\sqrt{3} + 3i}$

z på formen $a + ib$:

$$z = \frac{6}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{6 \cdot (\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)} = \frac{6(\sqrt{3} - 3i)}{3 - 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - 9i^2}$$

$$= \frac{6(\sqrt{3} - 3i)}{12} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}}}$$

z på polarformen $re^{i\theta}$:

Vi finner modulus (r) og argument (θ) til z.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vinkelen ligger i 4. kvadrant.

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Som gir

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \underline{\underline{\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{3}}}}$$

2. Vil løse $P(w) = w^2 - w + 1 = 0$

Her er $a = 1$, $b = -1$ og $c = 1$. Dermed er

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

Vi bruker løsningene til å finne alle komplekse løsninger til likningen

$P(z) = z^4 - z^2 + 1 = 0$

Vi bruker substitusjon, $w = z^2$

$w^2 - w + 1 = 0$

Dette er lik $P(w) = 0$ som vi løste først, med løsningene

$$w = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dermed er

$$z^2 = w = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Som vi må finne løsningene (kvadratrøttene) til.

Skriver z^2 på polarformen $re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left.\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

Som gir

$$z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Finner kvadratrøttene

$$w_k = r^{1/2} e^{i(\theta + 2k\pi)/2}$$

$$w_0 = 1^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_1 = 1^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\cdot\frac{1}{2}} = e^{i\frac{7\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Lemma 3.5.3 sier at dersom w_0 og w_1 er røtter i $P(z)=0$ der $P(z)$ kun har reelle koeffisienter, er de konjugerte $\overline{w_0}$ og $\overline{w_1}$ også røtter. Løsningene opptrer i konjugerte par.

De komplekse løsningene til $P(z) = z^4 - z^2 + 1 = 0$ er altså

$$\underline{\underline{z = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}}}$$

Faktorisering av $P(z) = z^4 - z^2 + 1$ i komplekse førstegradspolynomer:

Algebraens fundamentalsetning sier at

$P(z) = (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4)$ der r_1, r_2, r_3, r_4 er røtter / løsninger til $P(z) = 0$, så

$$P(z) = (z - w_0)(z - \overline{w_0})(z - w_1)(z - \overline{w_1})$$
$$= \left(z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

Faktorisering av $P(z)$ i reelle andregradspolynomer:

Vi multipliserer de konjugerte parene sammen

$$\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = z^2 - z\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{z}{2} - z\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{z}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i^2}{4}$$
$$= z^2 - 2z\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = z^2 - z\sqrt{3} + 1$$

$$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = z^2 + z\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{z}{2} + z\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{z}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i^2}{4} = z^2 + z\sqrt{3} + 1$$

$$P(z) = (z^2 - z\sqrt{3} + 1)(z^2 + z\sqrt{3} + 1)$$

Dermed er den reelle og komplekse faktoriseringen av $P(z)$:

$$P(z) = z^4 - z^2 + 1 = (z^2 - z\sqrt{3} + 1)(z^2 + z\sqrt{3} + 1)$$
$$= \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{3n + 2}{\sqrt{4n^2 - 1}}$

Siden

$$\left.\lim_{n \to \infty} 3n + 2 = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt{4n^2 - 1} = \infty \right\} \text{divergerer}$$

kan vi ikke bruke regnereglene for grenseverdier direkte.

Vi må derfor skrive om på uttrykket.

$$\frac{3n+2}{\sqrt{4n^2-1}} = \frac{3n+2}{\sqrt{n^2\left(4-\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{(3n+2)\cdot 1/n}{\left(n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right)\cdot 1/n} = \frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{3+0}{\sqrt{4-0}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n}-n\right)$$

$$\left.\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-5n} = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty \right\} \text{divergerer}$$

Vi skriver om på uttrykket ved å multiplisere med det konjugerte uttrykket over og under brøkstreken.

$$\sqrt{n^2-5n}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2-5n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-5n}+n\right)}{\sqrt{n^2-5n}+n} = \frac{\left(\sqrt{n^2-5n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2-5n}+n}$$

$$= \frac{n^2-5n-n^2}{\sqrt{n^2-5n}+n} = \frac{-5n}{\left(\sqrt{n^2\left(1-\frac{5}{n}\right)}+n\right)} = \frac{(-5n)\cdot 1/n}{\left(n\sqrt{1-\frac{5}{n}}+n\right)\cdot 1/n}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{n}}+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{n}}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(-5)}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{5}{n}}+1\right)} = \frac{-5}{\sqrt{1}+1} = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$$

4. Vi skal finne de komplekse tallene z som oppfyller likningen

$$2|z-1| = |z-4|$$

Hvis $z = x+iy$, da er $z-1 = (x-1)+iy$ og $z-4 = (x-4)+iy$

$$2|(x-1)+iy| = |(x-4)+iy|$$

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

$$2^2\left((x-1)^2+y^2\right) = (x-4)^2+y^2$$

$$4(x^2-2x+1+y^2) = x^2-8x+16+y^2$$

$$4x^2-8x+4+4y = x^2-8x+16+y^2$$

$$3y^2 = -3x^2+12 \quad |:3$$

$$y^2 = -x^2+4$$

$$\Updownarrow$$

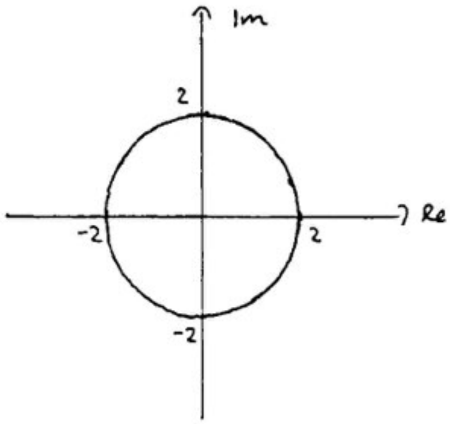
$$x^2+y^2 = 4$$

$$x^2+y^2 = 4$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = 2^2$$

Dette kan vi observere som sirkellikningen. Sirkelen har sentrum i origo $(0,0)$ og radius lik $\sqrt{4} = 2$.

Skisse av løsningsmengden i det komplekse planet:



Løsningsmengden består av alle komplekse tall $z = x + iy$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 4$.

---

5. La $\{a_n\}$ være følgen definert ved $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ for $n \geq 1$

① Bevis $a_n < 9$

Vil vise at $a_n < 9$ for alle $n \geq 1$, altså at $\{a_n\}$ er oppad begrenset.

Vi bruker induksjon:

Sjekker om påstanden stemmer for $n = 1$

Siden $a_1 = 3 < 9$, stemmer påstanden for $n = 1$.

Sjekker om påstanden stemmer for $n = k+1$ gitt at den gjelder for $n = k$.

Anta at $a_k < 9$ for $n \geq 1$, vil vise at $a_{k+1} < 9$

Vi har

$$a_{k+1} = 3\sqrt{a_k} < 3\sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9$$

der ulikheten følger av induksjonshypotesen.

Ved induksjon følger det at $a_n < 9$ for alle $n \geq 1$ og $\{a_n\}$ er dermed oppad begrenset. ▨

② Bevis $a_{n+1} > a_n$

Vil vise at $a_{n+1} > a_n$ for alle $n \geq 1$, altså at $\{a_n\}$ er voksende.

Sjekker om påstanden stemmer for $n = 1$.

Siden $a_{1+1} = a_2 = 3\sqrt{a_1} = 3\sqrt{3} > 3 = a_1$, stemmer

påstanden for $n = 1$.

Sjekker om påstanden stemmer for $n=k+1$ gitt at den gjelder for $n=k$.

Anta at $a_{k+1} > a_k$, vil vise at $a_{k+2} > a_{k+1}$

Vi har

$$a_{k+2} = 3\sqrt{a_{k+1}} > 3\sqrt{a_k} = a_{k+1}$$

der ulikheten følger av induksjonshypotesen.

Ved induksjon følger det at $a_{n+1} > a_n$ for alle $n \geq 1$ og $\{a_n\}$ er dermed voksende. $\blacksquare$

Siden $\{a_n\}$ er voksende, vil den også være nedad begrenset. $\{a_n\}$ er altså både oppad og nedad begrenset, som vil si at følgen generelt er begrenset.

Teorem 4.3.9 sier at en monoton, begrenset følge alltid er konvergent. Dermed kan vi konkludere at følgen konvergerer, siden den er voksende og begrenset.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eksisterer

La $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$

$\{a_n\}$ og $\{a_{n+1}\}$ konvergerer mot det samme tallet fordi disse er i praksis samme følge.

Vi har $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt{a_n}$

$$= \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 3\cdot\sqrt{A}$$

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{A} \\ A^2 &= 9A \quad |:A \\ A &= 9 \end{aligned}$$

så $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = 9}}$