UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Torsdag 13. januar 2022 (ny og utsatt eksamen)
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle punktene (1, 2a, 2b, 3, osv.) teller i utgangspunktet likt i sensuren. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter. Husk å begrunne svarene dine.

Alle hjelpemidler er tillatt (bøker, notater, kalkulator, dataprogrammer osv.), men du har ikke lov til å kommunisere med andre under eksamen (dette inkluderer å stille eller besvare spørsmål på nettsider). Du må gjerne bruke dataprogrammer, men du må forklare hvilke programmer du bruker og hvilken input du gir dem, slik at det mulig å følge argumentasjonen din. Svar som viser matematisk forståelse og matematiske ferdigheter, vil gi bedre uttelling enn svar som bare krever inntasting i et dataprogram. Svar som ikke er begrunnet, vil få null poeng i sensuren.

Oppgave 1 (10 poeng) I hvilken retning vokser $f(x, y, z) = x\cos(xy)e^z$ raskest i punktet $\mathbf{a} = (\pi, 1, -2)$?

Oppgave 2 (20 poeng)

a) Finn arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{u} = (2, -1)$ og $\mathbf{v} = (3, 2)$.

b) Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{d} = (-1, 4, 1)$.

Oppgave 3 (10 poeng) Du får oppgitt at $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ er den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Finn løsningen $\mathbf{x}$ til ligningen

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4 (20 poeng)

a) Området under grafen til $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, dreies om y-aksen. Finn volumet til omdreiningslegemet.

b) Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 5 (10 poeng) En følge $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ er definert ved $a_0 = 5$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 12}{8}$$

for $n \geq 0$. Avgjør om følgen konvergerer og finn i så fall grensen.

Oppgave 6 (10 poeng) En $n \times n$-matrise A kalles *idempotent* hvis $A^2 = A$. Vis at hvis A er idempotent og inverterbar, så er $A = I_n$ (der I_n er $n \times n$ identitetsmatrisen). Vis også at 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$$

er idempotent hvis og bare hvis $a^2 - a + bc = 0$.

Oppgave 7 (20 poeng) En funksjon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{Ax}-1}{x} & \text{for } x < 0 \\ \\ Bx + 2 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

der A og B er konstanter.

a) For hvilke verdier av A og B er f kontinuerlig i 0?

b) For hvilke verdier av A og B er f deriverbar i 0?

Oppgave 8 (20 poeng) I denne oppgaven er a, b to positive reelle tall med $a < b$, og $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en positiv funksjon slik at f' er kontinuerlig og strengt positiv.

a) Bruk substitusjon og delvis integrasjon til å vise at

$$\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{1}{2}b^2 f(b) - \frac{1}{2}a^2 f(a) - \frac{1}{2}\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)^2\,du$$

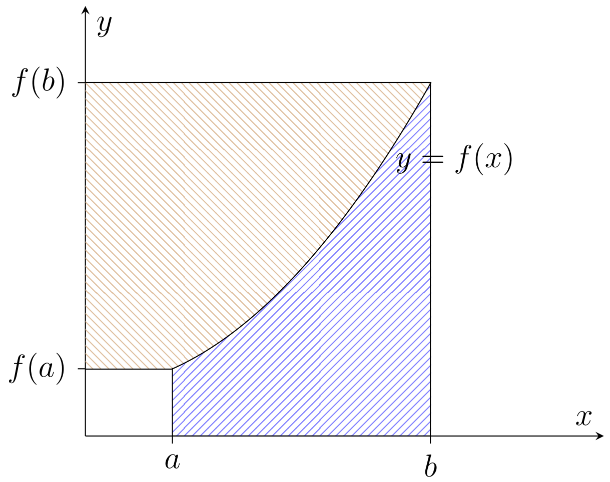
der g er den omvendte funksjonen til f.

(Fortsettes på side 3.)

b) Hvis vi ganger formelen ovenfor med 2π og skifter variabelnavn fra u til y, får vi

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx = \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \pi \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)^2\, dy$$

Forklar hvordan denne formelen kan tolkes geometrisk ved å se på volumene som fremkommer når vi roterer de fargede områdene på figuren nedenfor om y-aksen.



Slutt