Kontinuasjonseksamen i MAT1100 H-21. Løsningsforslag

Oppgave 1 (10 poeng) Vi finner først de partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot \cos(xy)e^z - x\sin(xy)ye^z = (\cos(xy) - xy\sin(xy))e^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(-\sin(xy)x)e^z = -x^2\sin(xy)e^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\cos(xy)e^z$$

Gradienten i punktet $\mathbf{a} = (\pi, 1, -2)$ er dermed

$$\nabla f(\pi, 1, -2) = \big((\cos\pi - \pi\sin\pi)e^{-2}, -\pi^2\sin(\pi)e^{-2}, \pi\cos(\pi)e^{-2}\big)$$
$$= e^{-2}(-1, 0, -\pi)$$

Dette betyr at f vokser raskest i retningen $(-1, 0, -\pi)$ (som er den samme som retningen $e^{-2}(-1, 0, -\pi)$).

Oppgave 2 (20 poeng) a) Arealet av parallellogrammet er gitt ved

$$A = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}| = |2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3| = 7.$$

b) Pyramiden har samme volum som pyramiden utspent av $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (0, -2, 2)$, $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{d} - \mathbf{a} = (-2, 3, 0)$, dvs.

$$\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}|$$

$$= \frac{1}{6}|0 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3| = \frac{1}{3}$$

Oppgave 3 (10 poeng) Ganger vi ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ fra høyre med B, får vi $BA\mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Siden $BA = I_3$, er dette det samme som $\mathbf{x} = B\mathbf{b}$. Dermed er

$$\mathbf{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4 (20 poeng) a) Volumet er gitt ved

$$V = 2\pi\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = 2\pi\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - 2\pi\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x\,dx$$

$$= \pi^2 - 2\pi\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi^2 - 2\pi$$

der vi har brukt delvis integrasjon med $u = x$, $u' = 1$, $v' = \cos x$, $v = \sin x$.

b) Integralet konvergerer. Dette kan sees på to måter:

Metode 1: Vi utfører integrasjonen ved å substituere $u = \arctan x$, $du = \frac{1}{1+x^2}dx$:

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\arctan b} u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\arctan b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan^2 b = \frac{\pi^2}{8}$$

Integralet konvergerer siden grensen er endelig.

Metode 2: Vi skriver $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$. Den første delen er endelig siden integranden er begrenset. Vi sammenligner den andre delen med det konvergente integralet $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\arctan x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\arctan x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Integralet konvergerer dermed ved grensesammenligningskriteriet.

Oppgave 5 (10 poeng) Vi finner først potensielle grenseverdier. Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, så er

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+12}{8} = \frac{a^2+12}{8},$$

så a må være en løsning av ligningen $a = \frac{a^2+12}{8}$, som er ekvivalent med $a^2 - 8a + 12 = 0$. Denne annengradsligningen har løsningene $a = 2$ og $a = 6$.

Setter vi $a_0 = 5$ inn i rekursjonsformelen $a_{n+1} = \frac{a_n^2+12}{8}$, får vi $a_1 = \frac{37}{8} < 5$. Dette gir oss en mistanke om at følgen avtar mot 2. Vi setter derfor opp induksjonsantagelsen:

$\mathrm{P}_n : 2 < a_{n+1} < a_n$

Vi vet allerede at P_0 er sann, så det holder å vise at P_n medfører P_{n+1}. Vi har:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2+12}{8} > \frac{2^2+12}{8} = 2$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 12}{8} < \frac{a_n^2 + 12}{8} = a_{n+1}$$

som viser at P_{n+1} holder. Vi har dermed vist at $\{a_n\}$ er avtagende og nedad begrenset av 2. Det betyr at $\{a_n\}$ konvergerer, og den eneste mulige grenseverdien er $a = 2$. Altså er $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Oppgave 6 (10 poeng) Anta A er idempotent og inverterbar. Da ganger vi likheten $A^2 = A$ fra venstre med A^{-1} og får $A^{-1}A^2 = A^{-1}A$ som er ekvivalent med $A = I_n$.

Ganger vi 2×2-matrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ med seg selv, får vi:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b \\ c & bc + (1-a)^2 \end{pmatrix}$$

At A er idempotent er dermed ekvivalent med at $a^2 + bc = a$ og $bc + (1-a)^2 = 1 - a$. Den første uttrykket er åpenbart ekvivalent med betingelsen $a^2 - a + bc = 0$. Ganger vi ut det siste uttrykket og forkorter, ser vi at det også er ekvivalent med $a^2 - a + bc = 0$. Altså er A idempotent hvis og bare hvis $a^2 - a + bc = 0$.

Oppgave 7 (20 poeng) a) Vi har $f(0) = 2$. Skal f være kontinuerlig, må derfor $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. Siden vi åpenbart har $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, er det nok å sjekke når $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$. Vi har

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{Ax} - 1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{Ae^{Ax}}{1} = A.$$

Dette betyr at f er kontinuerlig i 0 dersom $A = 2$ (B kan være hva som helst).

b) f kan bare være deriverbar dersom den er kontinuerlig, så vi vet at $A = 2$. Vi må undersøke når grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

eksisterer. Det er lett å se at

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{Bx + 2 - 2}{x} = B,$$

så vi må vi sjekke

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2e^{2x}-2}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{4e^{2x}}{2} = 2.$$

Vi ser at de ensidige grensene er like når $B = 2$. Dette betyr at funksjonen er deriverbar bare når $A = 2$ og $B = 2$.

Oppgave 8 (20 poeng) a) Vi skifter først variabel ved å sette $u = f(x)$. Løser vi for x, får vi $x = g(u)$ og $dx = g'(u)\,du$. De nye grensene blir $f(a)$ og $f(b)$, og dermed har vi

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,u\,g'(u)\,du = \int_{f(a)}^{f(b)} u\,g(u)g'(u)\,du$$

Vi fortsetter med delvis integrasjon der vi setter $U = u$, $V' = g(u)g'(u)$. Da er $U' = 1$, $V = \frac{1}{2}g(u)^2$, og vi får

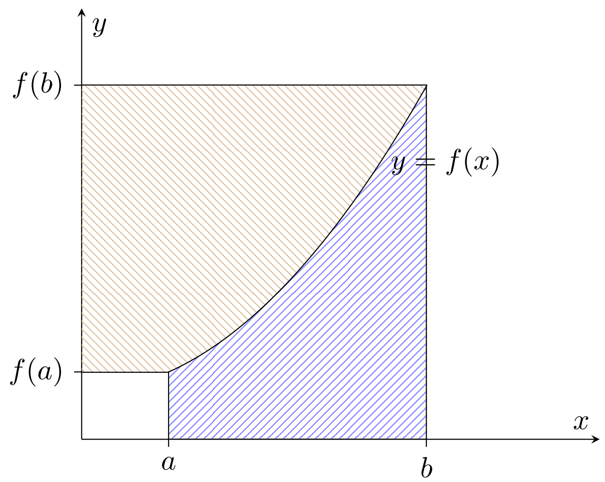
$$\int_{f(a)}^{f(b)} u\,g(u)g'(u)\,du = \left[\frac{1}{2}ug(u)^2\right]_{f(a)}^{f(b)} - \int_{f(a)}^{f(b)} 1\cdot g(u)^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}b^2f(b) - \frac{1}{2}a^2f(a) - \frac{1}{2}\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)^2\,du,$$

der vi har brukt at $g(f(a)) = a$ og $g(f(b)) = b$. Kombinerer vi de to formlene ovenfor, får vi

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{1}{2}b^2f(b) - \frac{1}{2}a^2f(a) - \frac{1}{2}\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)^2\,du$$

b) Hvis vi roterer det store rektangelet med hjørner i $(0,0)$, $(b,0)$, $(b,f(b))$ og $(0,f(b))$ om y-aksen, får vi en sylinder som har radius b og høyde $f(b)$, og dermed volum $\pi b^2 f(b)$. Denne sylinderen er satt samme av tre deler, de



to rotasjonslegemene vi får ved å dreie de to fargede områdene rundt y-aksen, pluss sylinderen vi får når det lille rektangelet med hjørner i $(0,0)$, $(a,0)$, $(a, f(a))$ og $(0, f(a))$ dreies om y-aksen. Omdreiningslegemet generert av det blå området er gitt ved

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

For å finne volumet generert av det røde området, observerer vi at hvis vi tenker på y-aksen som førsteaksen, er dette området under grafen $x = g(y)$ mellom endepunktene $f(a)$ og $f(b)$. Volumet av omdreiningslegemet er dermed

$$\pi \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)^2\, dy.$$

Volumet til sylinderen generert av det lille rektangelet, er $\pi a^2 f(a)$. Legger vi sammen disse tre volumene, får vi:

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx + \pi \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)^2\, dy + \pi a^2 f(a) = \pi b^2 f(b).$$

Flytter vi rundt på leddene, gir dette:

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx = \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \pi \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)^2\, dy,$$

som vi skulle vise.

Slutt