

Matriselikninger. Matriser som avbildninger.

eks. $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$ kan skrives som matriselikningen $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Her er

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 4 & 2 & 4x+2y \\ -1 & 3 & -x+3y \end{array} = \begin{bmatrix} 4x+2y \\ -x+3y \end{bmatrix}$$

Så matriselikningen sier at $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ -x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ □

En $(n \times n)$ -matrise A kan oppfattes som en funksjon eller en avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$, altså en funksjon

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ved at punktene i $\mathbb{R}^n$ oppfattes som søylevektorer, og vi ganger med A fra venstre. Vi har nå altså 3 skrivemåter for vektorer/punkter i $\mathbb{R}^n$:

$$(a_1, \dots, a_n) = [a_1, \dots, a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

eks. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ definerer en funksjon

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ved at

$$A(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

For eksempel :

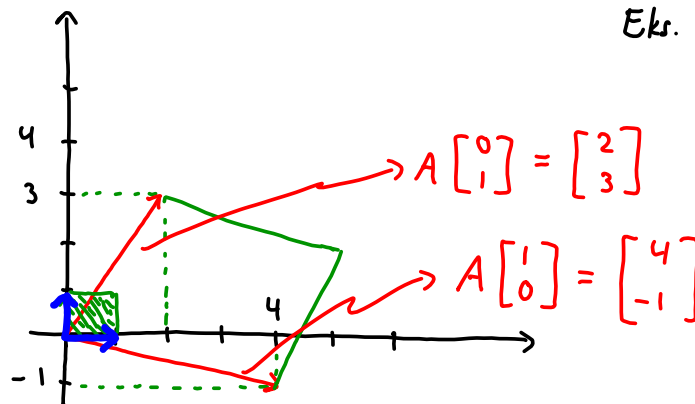
$$A(5, 7) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 5 \\ & & 7 \\ \hline 4 & 2 & 34 \\ -1 & 3 & 16 \end{array} = \begin{bmatrix} 34 \\ 16 \end{bmatrix} = (34, 16)$$

$$A(1, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 0 \\ \hline 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = (4, -1)$$

$$A(0, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & & 1 \\ \hline 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (2, 3)$$

Så : En matrise avbilder alltid standardbasisvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ over på søylevektorene sine.

$$\text{Eks. : } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$



Identitetsmatriser

er matrisene

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{osv.}$$

Disse oppfører seg som tallet 1 ved matrisemultiplikasjon:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

for alle $(n \times n)$ -matriser A .

eks. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} & & \pi & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & \pi \end{array} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ 17 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} & & \pi & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 17 & -1 \\ 0 & 1 & \pi & \sqrt{2} \end{array} = \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ 17 & -1 \end{bmatrix} \quad \square$$

En $(n \times n)$ -matrise A kalles inverterbar hvis det fins en $(n \times n)$ -matrise A^{-1} slik at

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$

der I_n er identitetsmatrisen av størrelse n . A^{-1} kalles den inverse av matrisen A .

eks. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ har invers matrise $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$

Sjekk:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{array}{cc|cc} & & \frac{3}{14} & -\frac{2}{14} \\ 4 & 2 & \frac{1}{14} & \frac{4}{14} \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Teorem

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s/d & -q/d \\ -r/d & p/d \end{bmatrix} \quad \text{der } d = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$$

Bevis

$$\begin{array}{cc|cc} & & s/d & -q/d \\ & & -r/d & p/d \\ \hline p & q & (ps - qr)/d & (-pq + qp)/d \\ r & s & (rs - sr)/d & (-rq + ps)/d \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Omvendt rekkefølge tilsvarende. $\square$

Notasjon

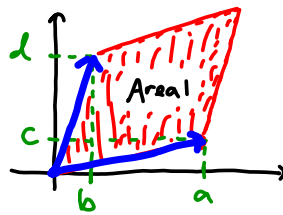
$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n \text{ stk}}$$

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$$

$$A^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-1})^n \quad \left. \vphantom{A^{-n}} \right\} \text{ for alle kvadratiske matriser}$$

Resultater om determinanter

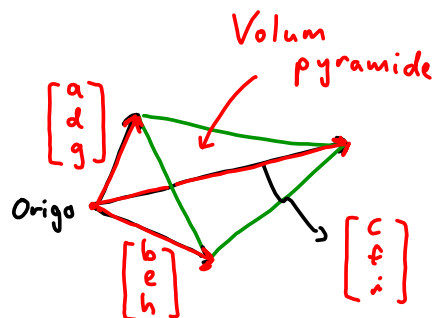
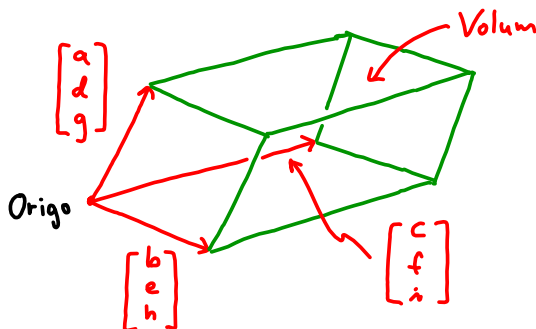
- ① $\det(A) = \det(A^T)$ for alle kvadratiske matriser
- ② A er invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) = |A| \neq 0$
- ③ Absoluttverdien av determinanten $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ er arealet av parallelogrammet utspent av søylevektorene $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$



- ④ Absoluttverdien av determinanten $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ er volumet av parallelepipedet utspent av søylevektorene

$$\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

Volumet av pyramiden utspent av disse vektorene er $\frac{1}{6}$ av absoluttverdien til determinanten.



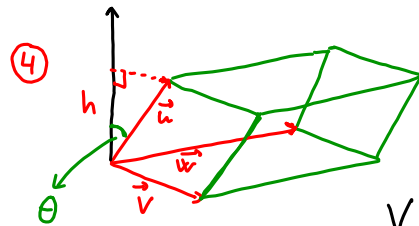
- ⑤
 - Byttes to linjer/rader i en determinant, skifter den fortegn
 - Ganger vi alle tall i en rad med et tall s , så multipliseres determinanten med s
 - Legger vi s ganger en rad til en annen rad, endres ikke determinanten.

Bævis ① Kan sjekkes ved regning (2×2 og 3×3)

② Kan forstås fra ③ og ④

③ Arealet ^{vet} $= |(a, c, 0) \times (b, d, 0)|$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} \right| \\
 &= \left| \vec{e}_1 \begin{vmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right| \\
 &= |\vec{e}_1 \cdot 0 - \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 (ad - bc)| \\
 &= |[0, 0, ad - bc]| = |ad - bc| = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|
 \end{aligned}$$



Vi har generelt at volumet av parallelepipedet utspent av tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er

$$\begin{aligned}
 V &= G \cdot h = \underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{G} \cdot h \\
 &= |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \theta \\
 &= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \quad (*)
 \end{aligned}$$

Videre er ved ① :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Og vi har :

$$\begin{aligned}
 &[a, d, g] \cdot ([b, e, h] \times [c, f, i]) \\
 &= [a, d, g] \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \\
 &= [a, d, g] \cdot \left(\vec{e}_1 \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \right) \\
 &= [a, d, g] \cdot \left[\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \right] \\
 &= a \cdot \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \quad \text{Kombinert med (*) fås (4).}
 \end{aligned}$$

⑤ Kan forstås intuitivt. Snakket. $\square$

Eks. Finn volumet av parallelepipedet utspent av vektorene $[1, 2, 5]$, $[2, 3, 0]$ og $[2, 5, 7]$.

Løsn.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (21 - 0) - 2 \cdot (14 - 25) + 2 \cdot (0 - 15)$$
$$= 21 + 22 - 30 = \underline{\underline{13}}$$

Matrise dynamikk

- Tiden regnes i tidspunkter $t = 0, 1, 2, \dots$
- Tilstanden til systemet ved tid $t = n$ er gitt ved en tilstandsvektor

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{Her: To-dimensjonalt tilfelle, } n = 2)$$

- Vi regner oss ett hakk fremover i tiden ved å gange tilstandsvektoren med en overgangsmatrise M :

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{for } n \geq 0$$

Eksempel x_n : Antall unge planter } ved tid $t = n$, t måles i år
 y_n : Antall gamle planter }

- ① Hver gammel plante gir opphav til 3 nye ungplanter neste år, men kun halvparten av de gamle plantene overlever selv til neste år.
- ② Alle unge planter overlever til neste år, og de er da blitt gamle. I tillegg sprer hver ungplante frø til to nye ungplanter neste år.

Finn overgangsmatrisen M .

Løsning Vi finner x_{n+1} og y_{n+1} uttrykt ved x_n og y_n .

$$\psi \rightarrow \psi + \psi\psi$$

$$\psi \rightarrow \psi\psi\psi + (0.5)\psi$$

Vi får

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{unge planter neste år}) = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = (\text{gamle } \text{---} \text{---} \text{---}) = x_n + (0.5)y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ dvs. } M = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}}}$$

Vi utvider eksemplet litt:

- Anta at $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$

$$\text{Da er } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 10 \\ 1 & 0.5 & 20 \end{array} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

- Finn en matrise N slik at vi kommer to år fremover i tiden ved å gange med N .

$$\text{To år frem: } M \cdot \left(M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right) = (M \cdot M) \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} = M^2 \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Får

$$M^2 = M \cdot M = \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array} = \begin{bmatrix} 7 & 7.5 \\ 2.5 & 3.25 \end{bmatrix}$$

- Finn en matrise A slik at vi kommer ett år bakover i tiden ved å gange med A .

Poeng: $\det M = -2 \neq 0$, dvs. M^{-1} fins. Vi har

$$\begin{aligned} M^{-1} \left(M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right) &= (M^{-1} \cdot M) \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= I \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi finner så M^{-1} : Formel $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

$$\text{Får da } M^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & 1.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$