

Matriser (1.5 og 1.6 i FLVA)

En $(m \times n)$ -matrise er et tallskjema med m rader og n søyer.

Eks. $A = \begin{pmatrix} 17 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ er en (2×3) -matrise

Notasjon: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ F.eks. $A_{13} = 2$
 $A_{22} = 0$

Multiplikasjon av matriser

Anta at vi skal finne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da setter vi det opp slik:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \end{array}$$

Produktet kommer frem her!

For å finne ut hva som skal stå på en gitt plass i produktmatrisen, tar vi skalarproduktet av raden og søylen som peker inn mot plassen:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \end{array}$$

Her skal det stå $0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$

Ferdig:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 \end{array}$$

Så konklusjonen er at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Som eksempel ganger vi de samme matrisene i omvendt rekkefølge:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}}}$$

Altså er matrisemultiplikasjon ikke kommutativt: Det kan skje at
 $A \cdot B \neq B \cdot A$

Annen regning med matriser

Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar (tall) foregår komponentvis. Å transponere betyr å bytte rader med søyler.

Eks. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3 & 19 & 7 \end{bmatrix}}}$$

Transponert

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Den transponerte
fås ved å "speile"
om diagonalen.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}}}$$

Teorem Regneregler for matriser (lar s være et reelt tall)

$$(1) (AB)C = A(BC)$$

$$(2) A(B+C) = AB+AC \quad \text{og} \quad A(B-C) = AB-AC$$

$$(3) (B+C)A = BA+CA \quad \text{og} \quad (B-C)A = BA-CA$$

$$(4) (sA)B = A \cdot (sB) = s \cdot (AB)$$

$$(5) A+B = B+A$$

$$(6) (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

Bevis (2) - (6) kan sjekkes ved regning og forstås intuitivt (Se bok). Vi skal motivere definisjonen av matrise-multiplikasjon og begrunne regel (1) ved å se på et barnehageeksempel. $\square$

Ekr. REMA : Brød 24.50, 1l melk 14.90, 1l juice 18.90
KIWI : Brød 25.90, 1l melk 12.90, 1l juice 17.90

Barnehagen trenger hver mandag:

Ertekrøken (store barn)

7 brød
5l melk
1l juice

Masalusa (småbarnsavgd.)

3 brød
2l melk
0l melk

Kan samle informasjonen i matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 24.50 & 14.90 & 18.90 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan regne ut:

REMA : 264.90 for Ertekrøken, 103.30 for Masalusa

KIWI : 263.70 — " — , 103.50 — " —

Kan samle denne informasjonen i matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix}$$

Da er

$$A \cdot B = \begin{array}{ccc|cc} & & & 7 & 3 \\ & & & 5 & 2 \\ & & & 1 & 0 \\ \hline 24.50 & 14.90 & 18.90 & 264.90 & 103.30 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & 263.70 & 103.50 \end{array} = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix} = C$$

For å begrunne (1) fra teoriet, utvider vi barnhageeksemplet.

Antall avdelinger med	Lasterbil 1 (L1)	Lasterbil 2 (L2)
Ertekrok - behov	4	1
Masalus - behov	3	2

Samler leverandør-info (lasterbilenes kundeantall) i matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får nå

$$(AB)D = \begin{array}{ccc|cc} & & & 4 & 1 \\ & & & 3 & 2 \\ \hline 264.90 & 103.30 & 1369.50 & 471.50 \\ 263.70 & 103.50 & 1365.30 & 470.70 \end{array}$$

L1 hos REMA (points to 4)
 L2 hos REMA (points to 1)
 L1 hos Kivi (points to 1369.50)
 L2 hos Kivi (points to 471.50)

På den annen side :

$$BD = \begin{array}{ccc|cc} & & & 4 & 1 \\ & & & 3 & 2 \\ \hline 7 & 3 & 37 & 13 \\ 5 & 2 & 26 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 37 & 13 \\ 26 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Antall brød L1 trenger (points to 37)
 Antall brød L2 trenger (points to 13)
 Antall juice L1 trenger (points to 4)
 Antall juice L2 trenger (points to 1)
 Tilsvarende for melk. (points to 26, 9)

Det L1 må betale hos REMA (points to 4)
 Det L2 må betale hos Kivi (points to 1)

$$A(BD) = \begin{array}{ccc|cc} & & & 37 & 13 \\ & & & 26 & 9 \\ & & & 4 & 1 \\ \hline 24.90 & 14.90 & 18.90 & 1369.50 & 471.50 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & 1365.30 & 470.70 \end{array}$$

Vi ser at det ikke er tilfeldig at dette blir lik $(AB)D$.

Matrisenes formater og tall kan endres til vilkårlige matriser.

Altså gir dette (på en måte) en generell begrunnelse for at $(AB)C = A(BC)$.

Regelen kan også sjekkes algebrak.