

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus

Eksamensdag: Onsdag 17. januar 2024

Tid for eksamen: 15.00 – 19.00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle punktene (1a, 1b, 2 osv.) teller i utgangspunktet likt i sensuren. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter. Husk å begrunne svarene dine.

Oppgave 1 (20 poeng) I denne oppgaven er $f(x, y) = xy \sin(xy^2)$.

- a) Finn de partiellderivate til f .
- b) Finn den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u})$ der $\mathbf{a} = (\frac{\pi}{2}, 1)$ og $\mathbf{u}$ er enhetsvektoren som peker i den retningen f vokser raskest i $\mathbf{a}$.

Oppgave 2 (10 poeng) En pyramide har hjørner i punktene $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 2, 0)$, $\mathbf{d} = (1, 2, 4)$. Finn volumet.

Oppgave 3 (20 poeng)

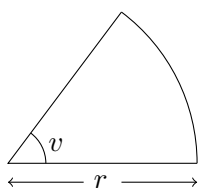
- a) Regn ut

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+5} dx.$$

- b) Regn ut

$$\int \ln(x^2 + 2x + 5) dx.$$

Oppgave 4 (10 poeng) Du skal lage en sirkelsektor med et gitt areal A (se figur). Hvordan skal du velge vinkelen v for at omkretsen til sirkelsektoren skal bli minst mulig? (Husk at arealet til en sirkelsektor er $A = \frac{1}{2}r^2v$ og at buelengden er $b = rv$.)



(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5 (10 poeng) Avgjør om det uegentlige integralet konvergerer eller divergerer:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3 + 2x + 4} dx.$$

Oppgave 6 (20 poeng) I denne oppgaven er funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1} & \text{for } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

- a) Vis at f er kontinuert.
- b) Vis at f er deriverbar i $x = 1$ og finn $f'(1)$.

Oppgave 7 (10 poeng) Vi sier at $n \times n$ -matrisen A kan omdannes til $n \times n$ -matrisen B dersom det finnes en inverterbar $n \times n$ -matrise P slik at $B = P^{-1}AP$. Vis at følgende holder for alle $n \times n$ -matriser A, B, C :

- (i) A kan omdannes til A .
- (ii) Hvis A kan omdannes til B , så kan B omdannes til A .
- (iii) Hvis A kan omdannes til B , og B kan omdannes til C , så kan A omdannes til C .

Oppgave 8 (20 poeng) I denne oppgaven er $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en funksjon med kontinuert annen derivert.

- a) Vis at for alle $a, b \in \mathbb{R}$, så er

$$\int_a^b \left[\int_a^x f''(t) dt \right] dx = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)$$

- b) Anta at $f'(a) = 0$ og at $a < b$. Vis at det må finnes et tall $t \in [a, b]$ slik at

$$f''(t) \geq \frac{2|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

SLUTT