

## MAT1100: Løsningsforslag til Oblig 1, H23

### Oppgave 1

a) Siden  $z = 2 - 3i$  og  $w = 3 + 4i$ , får vi:

$$z + w = (2 - 3i) + (3 + 4i) = 5 + i$$

$$z - w = (2 - 3i) - (3 + 4i) = -1 - 7i$$

og

$$zw = (2 - 3i)(3 + 4i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i + (-3i) \cdot 3 - 12i^2 = 6 + 8i - 9i + 12 = 18 - i$$

der vi har brukt at  $i^2 = -1$ .

Ganger vi med den konjugerte av nevneren over og under brøkstreken, ser vi videre at

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 - 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4i) + (-3i) \cdot 3 + 12i^2}{3^2 - (4i)^2} \\ &= \frac{-6 - 17i}{9 + 16} = -\frac{6}{25} - i\frac{17}{25} \end{aligned}$$

Bruker vi regnereglene for konjugasjon, får vi i det siste punktet:

$$\bar{z}\bar{w} = \overline{zw} = \overline{18 - i} = 18 + i$$

b) Vi isolerer først  $z$ :

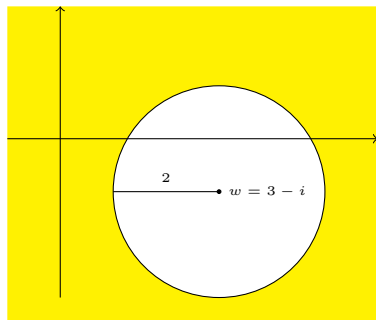
$$iz + 2i = (1 + 2i)z + 1 \iff -1 + 2i = (1 + i)z \iff z = \frac{-1 + 2i}{1 + i}$$

For å få uttrykket på formen  $a + ib$  ganger vi med den konjugerte av nevneren oppe og nede:

$$z = \frac{-1 + 2i}{1 + i} = \frac{(-1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 + i + 2i - 2i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$$

### Oppgave 2

a) Siden  $|z - 3 + i| = |z - (3 - i)|$ , ser vi at  $A$  består av de punktene som har en avstand til  $w = 3 - i$  som er større enn 2, dvs. alle punktene i det komplekse planet som ligger utenfor sirkelen om  $3 - i$  med radius 2 (det gule området på figuren).



b) Vi skriver først  $z = 2 - 2i\sqrt{3}$  på polarform. Vi har  $r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$  og  $\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Siden  $z$  ligger i fjerde kvadrant, får vi  $\theta = \frac{5\pi}{3}$  (det går fint å bruke  $\theta = -\frac{\pi}{3}$  isteden). Dette betyr at at den første kvadratroten  $w_0$  til  $z$  er gitt ved

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

Den andre kvadratroten er  $w_1 = -w_0 = \sqrt{3} - i$ .

### Oppgave 3

a) Vi ganger med den konjugerte over og under brøkstreken:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 3n} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - n^2}{n(\sqrt{1 + 3/n} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/n} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) La oss første se hvilke mulige grenseverdier som finnes. Antar vi at  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , ser vi at ligningen

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4}$$

blir til

$$a = \frac{a^2 + 3}{4}$$

når  $n \rightarrow \infty$ . Omformer vi litt, får vi  $a^2 - 4a + 3 = 0$ . Denne annengradslikningen har løsningene 1 og 3, som dermed er de eneste mulige grenseverdiene. For å undersøke hvilke av disse grenseverdiene det kan være, regner vi ut de første verdiene:  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = \frac{7}{4}$ ,  $a_2 = \frac{97}{64}$  ... Det ser altså ut som om følgen er avtagende, og hvis vi kan vise at den avtagende og begrenset nedad av den potensielle grenseverdien 1, følger det at den konvergerer. Vi prøver oss med et induksjonsbevis og setter opp induksjonshypotesen:

$$P_n : a_n > 1 \text{ og } a_n < a_{n-1}.$$

Vi har allerede sett at denne hypotesen holder for  $n = 1$ . Vi antar derfor at den holder for  $n = k$  og viser at den holder for  $n = k + 1$ : Først sjekker vi at  $a_{k+1} > 1$ : Vi har

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 3}{4} > \frac{1^2 + 3}{4} = 1$$

der vi har brukt at ifølge induksjonshypotesen er  $a_k > 1$ . Neste punkt er å vise at  $a_{k+1} < a_k$ . Ifølge induksjonshypotesen er  $1 < a_k < a_{k-1}$ , og dermed får vi

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 3}{4} < \frac{a_{k-1}^2 + 3}{4} = a_k.$$

Ved induksjon har vi dermed vist at  $P_n$  holder for alle  $n$ , og følgelig er  $\{a_n\}$  en avtagende følge som er nedad begrenset av 1. Ifølge teorem 4.3.8 i *Kalkulus* konvergerer da følgen, og den eneste mulige grenseverdien er 1 (følgen kan åpenbart ikke konvergere mot 3 når den starter på 2 og avtar). Altså er  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

**Oppgave 4** a) Funksjonen  $f(x) = e^x - 3x$  er kontinuert siden den er definert overalt og er bygget opp av kontinuerte grunnfunksjoner. Siden  $f(0) = e^0 - 0 = 1$  er positiv, og  $f(1) = e^1 - 3 = e - 3$  er negativ, forteller Skjæringssetningen oss at  $f$  har et nullpunkt mellom 0 og 1.

b) Vi må vise at gitt en  $\epsilon > 0$ , så finnes det en  $\delta > 0$  slik at  $|f(x) - 4| < \epsilon$  når  $0 < |x - 2| < \delta$ . Setter vi  $h = x - 2$ , får vi  $x = 2 + h$  og dermed

$$|f(x) - 2| = |(3x - 2) - 4| = |(3(2 + h) - 2) - 4| = 3|h|$$

Denne størrelsen blir mindre enn  $\epsilon$  når  $|h| = |x - 2|$  er mindre enn  $\frac{\epsilon}{3}$ . Vi velger derfor  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$  og observerer at hvis  $|h| = |x - 2| < \delta$ , så er

$$|f(x) - 2| = 3|h| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$