

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag: Prøveunderveiseksamen høsten 2023
Tid for eksamen: Fra: Når du vil – Til: To timer senere
Oppgavesettet er på 4 sider.
Vedlegg: Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 18 spørsmål som alle teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke “straffet” for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 6$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Da er z lik:

- A) $-3 + 3i\sqrt{3}$
- B) $-3 - 3i\sqrt{3}$
- C) $-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$
- D) $-3i\sqrt{3} - 3i$
- E) $-6 - 6i\sqrt{3}$

Oppgave 2. Det komplekse tallet $z = -2 + 2i$ har polarkoordinater:

- A) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}$
- B) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
- C) $r = 8, \theta = \frac{3\pi}{4}$
- D) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$
- E) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}$

Oppgave 3. Dersom $z = \overline{\left(\frac{1+2i}{3+i}\right)}$, så er:

- A) $z = \frac{1}{8} - \frac{7}{8}i$
- B) $z = \frac{2}{10} - \frac{9}{10}i$
- C) $z = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$
- D) $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- E) $z = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}i$

Oppgave 4. Mengden $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} > 4\}$ består av alle komplekse tall

(Fortsettes på side 2.)

som:

- A) ligger nærmere punktet 0 enn punktet 4
- B) ligger på den reelle akse
- C) ligger nærmere z enn $\bar{z}$
- D) ligger utenfor sirkelen med sentrum i origo og radius 2
- E) ligger nærmere punktet 4 enn punktet 0

Oppgave 5. Ligningen $\frac{i}{z-i} = \frac{1}{z+2}$ har løsningen:

- A) $z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$
- B) $z = -2 + \frac{5}{2}i$
- C) $z = -\frac{5}{2} + i$
- D) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
- E) $z = -2 + \frac{3}{2}i$

Oppgave 6. Den deriverte til $f(x) = \arcsin(x^2)$ er:

- A) $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$
- B) $-\frac{2x}{\sin^2 x^2}$
- C) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
- D) $-\frac{1}{\sin^2 x^2}$
- E) $\frac{2x}{1+x^4}$

Oppgave 7. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^5 + 7x^8}{2x^4 + 4x^6 + 8x^8}$ er lik:

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) 0
- D) $-\infty$
- E) $-\frac{3}{4}$

Oppgave 8. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ er lik:

- A) $-\infty$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) ∞
- D) 0
- E) 1

Oppgave 9. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ er lik:

- A) $-\infty$
- B) -1
- C) ∞
- D) $-\frac{1}{2}$
- E) 1

Oppgave 10. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$ er lik:

(Fortsettes på side 3.)

- A) 1
- B) e^2
- C) e^{-1}
- D) ∞
- E) $\frac{3}{2}$

Oppgave 11. Den omvendte funksjonen til $f(x) = \frac{\ln(3x+2)}{4}$ er:

- A) $g(x) = \frac{e^{3x+2}}{4}$
- B) Det finnes ingen omvendt funksjon
- C) $g(x) = \frac{4e^{x-2}}{3}$
- D) $g(x) = \frac{4}{\ln(3x+2)}$
- E) $g(x) = \frac{e^{4x}-2}{3}$

Oppgave 12. Den deriverte til $x^{\cos x}$ er lik:

- A) $x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$
- B) $\cos(x) x^{\cos x-1}$
- C) $-x^{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x}$
- D) $x^{\cos x} \ln \cos x$
- E) $x^{\cos x} \ln x$

Oppgave 13. Tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$ har $z = -1$ som rot. De andre røttene er:

- A) 1 og -4
- B) $-2i$ og $2i$
- C) $1-i$ og $1+i$
- D) $-i$ og i
- E) $2-i$ og $2+i$

Oppgave 14. Funksjonen f er definert for $x \geq 0$ ved $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$. Funksjonen er konveks på mengden:

- A) På hvert av intervallene $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \infty)$
- B) Ingen steder
- C) $[0, \infty)$
- D) $[0, \frac{1}{3}]$
- E) $[\frac{1}{3}, \infty)$

Oppgave 15. Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$. Da er $f'(0)$ lik:

- A) 1
- B) $f'(0)$ eksisterer ikke
- C) 0
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{1}{4}$

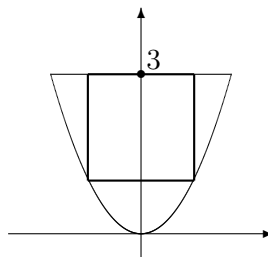
(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 16. Du skal bruke definisjonen av grenseverdi til å vise at følgen $x_n = \frac{5n-7}{2n}$ har grenseverdi $\frac{5}{2}$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor stor må du velge N for at $|x_n - \frac{5}{2}| < \epsilon$ når $n \geq N$?

- A) større enn $\min\{\frac{\epsilon}{4}, 1\}$
- B) større enn $\frac{7}{2\epsilon}$
- C) større enn $\max\{\epsilon^2, 1\}$
- D) større enn $\frac{5}{2\epsilon}$
- E) større enn $\frac{2}{5\sqrt{\epsilon}}$

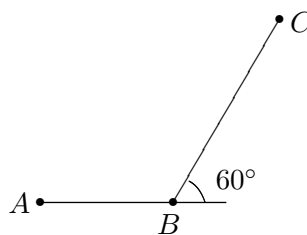
Oppgave 17. Figuren nedenfor viser parabelen $f(x) = x^2$ og et rektangel som ligger over funksjonsgrafen og under linjen $y = 3$. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?

- A) 4
- B) $2\sqrt{3}$
- C) $2\sqrt{2}$
- D) $2\sqrt[3]{3}$
- E) $3\sqrt{3}$



Oppgave 18. Figuren viser et skip C med kurs mot punktet B . Avstanden fra A til B er 3 nautiske mil. Skipet går med en fart på 14 knop (dvs. 14 nautiske mil per time). Hvor fort avtar avstanden mellom A og C i det øyeblikket den er 7 nautiske mil?

- A) $8\sqrt{3}$ nautiske mil per time
- B) 15 nautiske mil per time
- C) 13 nautiske mil per time
- D) $7\sqrt{3}$ nautiske mil per time
- E) $10\sqrt{2}$ nautiske mil per time



SLUTT