

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag: Prøveunderveiseksamen høsten 2023
Tid for eksamen: Fra: Når du vil – Til: To timer senere
Oppgavesettet er på 7 sider.
Vedlegg: Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag

Oppgave 1. Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 6$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Da er z lik:

- A) $-3 + 3i\sqrt{3}$
- B) $-3 - 3i\sqrt{3}$
- C) $-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$
- D) $-3i\sqrt{3} - 3i$
- E) $-6 - 6i\sqrt{3}$

Riktig svar: B

Begrunnelse: $z = r \cos \theta + ir \sin \theta = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + i \cdot 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 - 3i\sqrt{3}$.

Oppgave 2. Det komplekse tallet $z = -2 + 2i$ har polarkoordinater:

- A) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}$
- B) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$
- C) $r = 8, \theta = \frac{3\pi}{4}$
- D) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$
- E) $r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}$

Riktig svar: B

Begrunnelse: Vi har $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Videre er $\sin \theta = \frac{b}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden z ligger i annen kvadrant, er $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Oppgave 3. Dersom $z = \left(\frac{1+2i}{3+i}\right)$, så er:

- A) $z = \frac{1}{8} - \frac{7}{8}i$
- B) $z = \frac{2}{10} - \frac{9}{10}i$

(Fortsettes på side 2.)

- C) $z = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$
 D) $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
 E) $z = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}i$

Riktig svar: D

Begrunnelse: $z = \overline{\left(\frac{1+2i}{3+i}\right)} = \overline{\left(\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\right)} = \overline{\left(\frac{3-i+6i+2}{3^2-i^2}\right)} = \overline{\left(\frac{5+5i}{10}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

Oppgave 4. Mengden $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} > 4\}$ består av alle komplekse tall som:

- A) ligger nærmere punktet 0 enn punktet 4
 B) ligger på den reelle aksen
 C) ligger nærmere z enn $\bar{z}$
 D) ligger utenfor sirkelen med sentrum i origo og radius 2
 E) ligger nærmere punktet 4 enn punktet 0

Riktig svar: D

Begrunnelse: Hvis $z = x + iy$, så er $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Betingelsen $z\bar{z} > 4$ er derfor ekvivalent med $|z| > 2$. Den siste betingelse er oppfylt for alle z med modulus større enn 2, altså alle z som ligger utenfor sirkelen med sentrum i origo og radius 2.

Oppgave 5. Ligningen $\frac{i}{z-i} = \frac{1}{z+2}$ har løsningen:

- A) $z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$
 B) $z = -2 + \frac{5}{2}i$
 C) $z = -\frac{5}{2} + i$
 D) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$
 E) $z = -2 + \frac{3}{2}i$

Riktig svar: D

Begrunnelse: Vi har $\frac{i}{z-i} = \frac{1}{z+2} \implies iz + 2i = z - i \implies (1-i)z = 3i \implies z = \frac{3i}{1-i}$. Ganger vi med den konjugerte av nevneren over og under brøkstrekken, får vi videre: $z = \frac{(3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3i-3}{1^2-i^2} = \frac{-3+3i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$

Oppgave 6. Den deriverte til $f(x) = \arcsin(x^2)$ er:

- A) $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$
 B) $-\frac{2x}{\sin^2 x^2}$
 C) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
 D) $-\frac{1}{\sin^2 x^2}$
 E) $\frac{2x}{1+x^4}$

Riktig svar: C

Begrunnelse: Ved kjerneregelen:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^5 + 7x^8}{2x^4 + 4x^6 + 8x^8}$ er lik:

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{3}{4}$
- C) 0
- D) $-\infty$
- E) $-\frac{3}{4}$

Riktig svar: A

Begrunnelse: Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^5 + 7x^8}{2x^4 + 4x^6 + 8x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(1 - 3x + 7x^4)}{x^4(2 + 4x^2 + 8x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x + 7x^4}{2 + 4x^2 + 8x^4} = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 8. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ er lik:

- A) $-\infty$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) ∞
- D) 0
- E) 1

Riktig svar: B

Begrunnelse: Dette er et " $\frac{0}{0}$ "-uttrykk, og vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 9. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ er lik:

- A) $-\infty$
- B) -1
- C) ∞
- D) $-\frac{1}{2}$
- E) 1

Riktig svar: D

Begrunnelse: Dette er et " $\frac{0}{0}$ "-uttrykk, og vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cos x} = -\frac{1}{2}$$

Oppgave 10. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$ er lik:

- A) 1
- B) e^2
- C) e^{-1}
- D) ∞
- E) $\frac{3}{2}$

Riktig svar: B

Begrunnelse: Vi skriver først om uttrykket slik at vi får all x -avhengigheten

(Fortsettes på side 4.)

i eksponenten: $(1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}} = (e^{\ln(1+2x)})^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}}$. Vi tar nå en mellomregning på eksponenten:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Dermed er

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}} = e^2$$

Oppgave 11. Den omvendte funksjonen til $f(x) = \frac{\ln(3x+2)}{4}$ er:

A) $g(x) = \frac{e^{3x+2}}{4}$

B) Det finnes ingen omvendt funksjon

C) $g(x) = \frac{4e^{x-2}}{3}$

D) $g(x) = \frac{4}{\ln(3x+2)}$

E) $g(x) = \frac{e^{4x-2}}{3}$

Riktig svar: E

Begrunnelse: Vi løser ligningen $y = \frac{\ln(3x+2)}{4}$ for x :

$$y = \frac{\ln(3x+2)}{4} \implies 4y = \ln(3x+2) \implies e^{4y} = 3x+2 \implies x = \frac{e^{4y}-2}{3}.$$

Oppgave 12. Den deriverte til $x^{\cos x}$ er lik:

A) $x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$

B) $\cos(x) x^{\cos x-1}$

C) $-x^{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x}$

D) $x^{\cos x} \ln \cos x$

E) $x^{\cos x} \ln x$

Riktig svar: A

Begrunnelse: Vi har $f(x) = x^{\cos x} = (e^{\ln x})^{\cos x} = e^{\cos x \ln x}$, så ved kjerneregelen og produktregelen får vi:

$$f'(x) = e^{\cos x \ln x} \left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\cos x} \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right)$$

Oppgave 13. Tredjegradspolynomet $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$ har $z = -1$ som rot. De andre røttene er:

A) 1 og -4

B) $-2i$ og $2i$

C) $1-i$ og $1+i$

D) $-i$ og i

E) $2-i$ og $2+i$

Riktig svar: B

Begrunnelse: Ved polynomdivisjon ser vi at $\frac{z^3+z^2+4z+4}{z+1} = z^2 + 4$, så

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z+1)(z^2 + 4) = (z+1)(z-2i)(z+2i)$$

(Fortsettes på side 5.)

som viser at de andre røttene er $2i$ og $-2i$.

Oppgave 14. Funksjonen f er definert for $x \geq 0$ ved $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$. Funksjonen er konveks på mengden:

- A) På hvert av intervallene $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \infty)$
- B) Ingen steder
- C) $[0, \infty)$
- D) $[0, \frac{1}{3}]$
- E) $[\frac{1}{3}, \infty)$

Riktig svar: E

Begrunnelse: Vi deriverer to ganger: $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ (for $x > 0$) og $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ (fortsatt for $x > 0$). Vi faktoreriserer uttrykket for $f''(x)$ og får: $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}(x - \frac{1}{3})$. Dette uttrykket er negativt for $x < \frac{1}{3}$ og positivt for $x > \frac{1}{3}$, så f er konveks på $[\frac{1}{3}, \infty)$.

Oppgave 15. Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$. Da er $f'(0)$ lik:

- A) 1
- B) $f'(0)$ eksisterer ikke
- C) 0
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{1}{4}$

Riktig svar: D

Begrunnelse: Vi bruker definisjonen av den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Oppgave 16. Du skal bruke definisjonen av grenseverdi til å vise at følgen $x_n = \frac{5n-7}{2n}$ har grenseverdi $\frac{5}{2}$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor stor må du velge N for at $|x_n - \frac{5}{2}| < \epsilon$ når $n \geq N$?

- A) større enn $\min\{\frac{\epsilon}{4}, 1\}$
- B) større enn $\frac{7}{2\epsilon}$
- C) større enn $\max\{\epsilon^2, 1\}$
- D) større enn $\frac{5}{2\epsilon}$
- E) større enn $\frac{2}{5\sqrt{\epsilon}}$

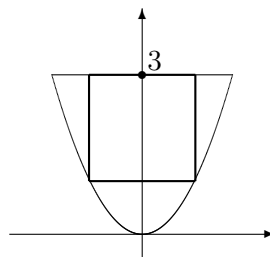
Riktig svar: B

Begrunnelse: Vi har $|x_n - \frac{5}{2}| = |\frac{5n-7}{2n} - \frac{5}{2}| = |\frac{-7}{2n}| = \frac{7}{2n}$. Vi må altså sørge for at $\frac{7}{2n} < \epsilon$, og det er tilfelle når $n > \frac{7}{2\epsilon}$. Det holder dermed å velge N større enn $\frac{7}{2\epsilon}$.

(Fortsettes på side 6.)

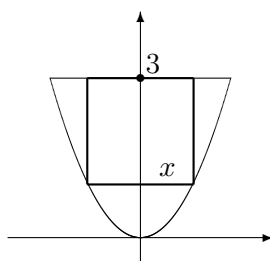
Oppgave 17. Figuren nedenfor viser parabelen $f(x) = x^2$ og et rektangel som ligger over funksjonsgrafen og under linjen $y = 3$. Hva er det største arealet et slikt rektangel kan ha?

- A) 4
- B) $2\sqrt{3}$
- C) $2\sqrt{2}$
- D) $2\sqrt[3]{3}$
- E) $3\sqrt{3}$



Riktig svar: A

Begrunnelse: Hvis vi lar halve grunnlinjen i rektangelet være x som på figuren nedenfor, så blir høyden $3 - x^2$.



Hele arealet er dermed

$$A(x) = 2x(3 - x^2) = 6x - 2x^3$$

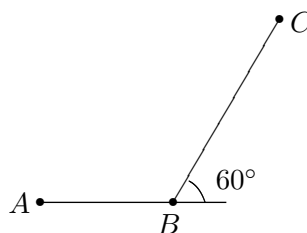
Derivasjon gir

$$A'(x) = 6 - 6x^2 = 6(1 - x)(1 + x)$$

Vi ser at $A'(x)$ bytter fortegn fra positivt til negativt for $x = 1$, så dette må være maksimumspunktet. Det maksimale arealet er dermed $A(1) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 = 4$.

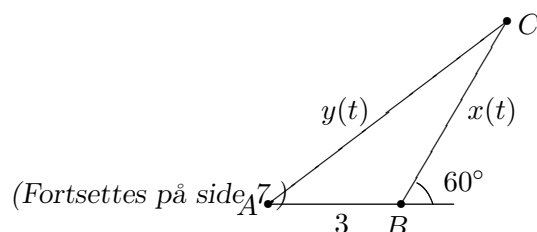
Oppgave 18. Figuren viser et skip C med kurs mot punktet B . Avstanden fra A til B er 3 nautiske mil. Skipet går med en fart på 14 knop (dvs. 14 nautiske mil per time). Hvor fort avtar avstanden mellom A og C i det øyeblikket den er 7 nautiske mil?

- A) $8\sqrt{3}$ nautiske mil per time
- B) 15 nautiske mil per time
- C) 13 nautiske mil per time
- D) $7\sqrt{3}$ nautiske mil per time
- E) $10\sqrt{2}$ nautiske mil per time



Riktig svar: C

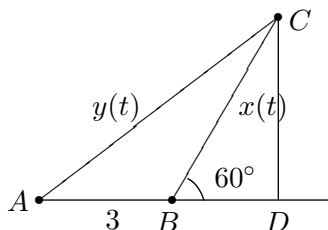
Begrunnelse: Figuren viser den generelle situasjonen der $x(t)$ er avstanden mellom skipet og B ved tiden t , og $y(t)$ er avstanden mellom skipet og A ved samme tidspunkt. Vi kjenner $x'(t)$ og må finne $y'(t)$.



Ser vi på trekanten $\triangle ABC$, får vi:

$$y(t)^2 = 9 + 3x(t) + x(t)^2 \quad (1)$$

Dette følger direkte fra cosinussetningen, men vi kan også få det fra figuren nedenfor:



Bruker vi at $BD = x(t) \cos 60^\circ = \frac{x(t)}{2}$ og $CD = x(t) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}x(t)}{2}$, så gir Pytagoras anvendt på $\triangle ADC$:

$$y(t)^2 = \left(3 + \frac{x(t)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x(t)}{2}\right)^2 = 9 + 3x(t) + x(t)^2$$

som er ligning (1).

Deriverer vi denne ligningen, får vi

$$2y(t)y'(t) = 3x'(t) + 2x(t)x'(t)$$

som gir

$$y'(t) = \frac{3x'(t) + 2x(t)x'(t)}{2y(t)} \quad (2)$$

Vi vet at i det øyeblikket vi er interessert i, er $y(t) = 7$ og $x'(t) = -14$. Vi kan finne $x(t)$ fra (1):

$$7^2 = 9 + 3x(t) + x(t)^2$$

som gir

$$x(t)^2 + 3x(t) - 40 = 0.$$

Denne annengradslikningen har løsningene

$$x(t) = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

Vi kan bare bruke den positive løsningen, så $x(t) = 5$. Dermed er gir ligning (2)

$$y'(t) = \frac{3 \cdot (-14) + 2 \cdot 5 \cdot (-14)}{2 \cdot 7} = -13$$

Avstanden avtar altså med en fart av 13 nautiske mil i timen.

SLUTT