

OBLIG 1, MAT1100, H2024
Løsningsforslag

Oppgave 1

La $v = 1 + i$ og $w = \sqrt{3} - i$.

- a) Regn ut $v\bar{v}$, vw og $\frac{v}{w}$.
- b) Finn v og tredjerøttene til v på formen $re^{i\theta}$.
- c) Vis at v er en rot i polynomet $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.
- d) Finn reell og kompleks faktorisering av $P(z)$.

Løsningsforslag: 1a) Vi har $v\bar{v} = |v|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Videre er

$$\begin{aligned}vw &= (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2 \\&= \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) + 1 \\&= (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1),\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}\frac{v}{w} &= \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} \\&= \frac{\sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i^2}{(\sqrt{3})^2 - i^2} \\&= \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{3 + 1} \\&= \frac{\sqrt{3} - 1}{4} + i\frac{\sqrt{3} + 1}{4}.\end{aligned}$$

1b) For polarformen til v regner vi ut $r = |v| = \sqrt{2}$ og $\cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\theta)$. Siden v ligger i første kvadrant, har vi $\theta = \frac{\pi}{4}$. I alt har vi polarformen

$$v = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Tredjerøttene til v er gitt som følger. Først har vi

$$w_0 = r^{1/3} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) = 2^{1/6} e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Neste 3.-rot er gitt ved

$$w_1 = r^{1/3} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{3} \right).$$

Her kan vi forenkle argumentet som følger:

$$\frac{\theta + 2\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 8\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}.$$

I alt gir dette

$$w_1 = 2^{1/6} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Den siste 3.-roten er gitt ved

$$w_2 = r^{1/3} \left(\cos \frac{\theta + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 4\pi}{3} \right).$$

Argumentet blir da

$$\frac{\theta + 4\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}.$$

Dermed er polarformen til w_2 gitt ved

$$w_2 = 2^{1/6} e^{i \frac{17\pi}{12}}.$$

For 1c) regner vi ut

$$\begin{aligned} P(1+i) &= (1+i)^3 + (1+i)^2 - 4(1+i) + 6 \\ &= 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 + 1 + 2i + i^2 - 4 - 4i + 6 \\ &= 1 + 3i - 3 - i + 1 + 2i - 1 + 2 - 4i \\ &= 0, \end{aligned}$$

som viser at $1+i$ er en rot i polynomet $P(z)$.

For 1d) ser vi at siden $P(z)$ er et reelt polynom, må også den konjugerte til $1+i$, altså $\bar{v} = 1-i$, være en rot. Siden P er et polynom av grad 3, vet vi fra algebraens fundamentalsetning at det finnes et komplekst tall r slik at

$$P(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))(z - r).$$

Det gjenstår å finne r . Men først finner vi, for eksempel ved å bruke 1a), at

$$(z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - z \cdot 2\operatorname{Re}(v) + |v|^2 = z^2 - 2z + 2.$$

Da kan vi finne r ved polynomdivisjon, som gir

$$P(z) : (z^2 - 2z + 2) = (z + 3).$$

Dette gir reell faktorisering

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z + 3).$$

Kompleks faktorisering er

$$P(z) = (z - (1+i))(z - (1-i))(z + 3).$$

Oppgave 2

La $0 \leq c \leq \sqrt{2}$ være et reelt tall. En følge $\{a_n\}$ er gitt rekursivt ved $a_1 = \sqrt{2}$ og

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n) \text{ for } n \geq 1.$$

Vis at $\{a_n\}$ konvergerer og bestem grensen.

Løsningsforslag. Vi har $a_2 = \frac{1}{2}(c + a_1) \leq a_1$ siden $c \leq a_1$. Vi viser ved induksjon at følgen $\{a_n\}$ er avtagende. La P_n være påstanden: $a_{n+1} \leq a_n$ for $n \in \mathbb{N}$.

Først ser vi at P_1 er påstanden: $a_2 \leq a_1$, som vi nettopp så var sann. Vi antar at P_k er sann for et naturlig tall k . Dette betyr at vi har $a_{k+1} \leq a_k$. For å sjekke P_{k+1} , erstatter vi n med $k + 1$ i P_n og ser at

$$a_{k+2} = \frac{1}{2}(c + a_{k+1}) \leq \frac{1}{2}(c + a_k) = a_{k+1},$$

som ønsket. Ved induksjonsprinsippet følger det at $a_{n+1} \leq a_n$ for alle n .

Vi sjekker deretter at følgen er begrenset. Men $a_1 = \sqrt{2} \geq c$, og $a_2 \geq c$ siden dette er det samme som å ha $c + a_1 \geq 2c$, hvilket er sant fordi $a_1 \geq c$. Vi viser nå ved induksjon at $a_n \geq c$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi har sjekket P_1 , så vi antar at P_k er sann, altså at $a_k \geq c$. Da får vi

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(c + a_k) \geq \frac{1}{2}(c + c) = c,$$

så P_{k+1} holder. Ved induksjoner derfor $a_n \geq c$ for alle naturlige tall n .

Med setning 4.3.9 kan vi slutte at $\{a_n\}$ er konvergent. La $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Da er også $w = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ og ved å ta grenser i det rekursive uttrykket får vi at

$$a = \frac{1}{2}(c + a).$$

I alt er $a = c$ så $a_n \rightarrow c$ for $n \rightarrow \infty$.

Oppgave 3

Vis at funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = -4x + 5$ er kontinuerlig i punktet $a = 1$ ved bruk av Definisjon 5.1.1.

Løsningsforslag. Vi starter med å gi en $\varepsilon > 0$. Vi må finne en $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \text{ såfremt } |x - 1| < \delta.$$

Setter vi $h = x - 1$, så har vi $x = h + 1$. Vi setter inn i $f(x)$ og regner ut at

$$|f(x) - f(1)| = |f(h + 1) - (-4 \cdot 1 + 5)| = |-4(h + 1) + 5 - 1| = |4h|.$$

Dersom det skal gjelde at $|4h| = 4|h| < \varepsilon$, må $|h| < \varepsilon/4$. Så vi velger $\delta = \varepsilon/4$. Med dette valget er vi sikret at når $|x - 1| < \delta$, så vil $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, som var det vi skulle vise.

Oppgave 4

a) Finn faktoriseringen av $x^2 + 3x - 4$.

b) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 3x - 4}.$$

Hint: Du kan bruke at $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

c) En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{3(x-1)} & \text{når } x \in [0, 1] \\ a \cdot \frac{\sin(x-1)}{x^2+3x-4} & \text{når } x \in (1, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Finn verdien til det reelle tallet a slik at f blir kontinuertlig på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Løsningsforslag.

a) Faktoriseringen er $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ siden andregradsligningen $x^2 + 3x - 4 = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2},$$

som er 1 og -4.

b) Grenseverdien er

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+4} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$, som gjelder siden for $u = x - 1$ vil $u \rightarrow 0$ når $x \rightarrow 1$.

c) Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{3(x-1)} & \text{når } x \in [0, 1] \\ t \cdot \frac{\sin(x-1)}{x^2+3x-4} & \text{når } x \in (1, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

er kontinuertlig på $[0, 1]$ og på $(1, \frac{\pi}{2}]$. For at den skal være kontinuertlig på hele intervallet, trenger vi at den er kontinuertlig i punktet $a = 1$. Men fra 4b) får vi at

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} t \cdot \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 3x - 4} = t \cdot \frac{1}{5},$$

og siden $f(1) = e^{3(1-1)} = 1$, ser vi at vi må ha $t = 5$.

Oppgave 5

Vis at ligningen $(x^3 + 1)3^{x+1} = 2$ har en reell løsning i det lukkede intervallet $[-1, 0]$.

Løsningsforslag. La $f(x) = (x^3 + 1)3^{x+1} - 2$. Da er f kontinuertlig på det lukkede intervallet $[-1, 0]$ siden f er en sammensetning av kontinuerte funksjoner. Vi har $f(-1) = -2 < 0$ og $f(0) = 3 - 2 = 1 > 0$. Da kan vi bruke skjæringssetningen og konkludere med at det finnes et reelt tall c i $[-1, 0]$ slik at $f(c) = 0$, som var det vi skulle vise.