10. september 2024

MAT1100

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 26. september 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Det er totalt fem oppgaver. Det kreves minst 60 % riktig for å få en oppgave godkjent. Du må ha tre av fem oppgaver godkjent for å bestå obligen.

Oppgave 1. (Tema for denne oppgaven er komplekse tall.)
La $v = 1 + i$ og $w = \sqrt{3} - i$.

a) Regn ut $v\bar{v}$, vw og $\frac{v}{w}$.

b) Finn v og tredjerøttene til v på formen $re^{i\theta}$.

c) Vis at v er en rot i polynomet $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

d) Finn reell og kompleks faktorisering av $P(z)$.

Oppgave 2. (Tema for denne oppgaven er følger.)
La $0 \leq c \leq \sqrt{2}$ være et reelt tall. En følge $\{a_n\}$ er gitt rekursivt ved $a_1 = \sqrt{2}$ og

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(c + a_n) \text{ for } n \geq 1.$$

Vis at $\{a_n\}$ konvergerer og bestem grensen.

Oppgave 3. (Tema for denne oppgaven er kontinuitet ved ε, δ definisjonen.)

Vis at funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = -4x + 5$ er kontinuerlig i punktet $a = 1$ ved bruk av Definisjon 5.1.1.

Oppgave 4. (Tema for denne oppgaven er grenseverdier og kontinuitet.)

a) Finn faktorisering av $x^2 + 3x - 4$.

b) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 3x - 4}.$$

Hint: Du kan bruke resultatet fra oppg. 4a) og at $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

c) En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{3(x-1)} & \text{når } x \in [0, 1] \\ t \cdot \frac{\sin(x-1)}{x^2+3x-4} & \text{når } x \in (1, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Finn verdien til det reelle tallet t slik at f blir kontinuerlig på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Oppgave 5. (Tema for denne oppgaven er teoremer for kontinuerlige funksjoner på begrensede intervaller.)

Vis at ligningen $(x^3 + 1)3^{x+1} = 2$ har en reell løsning i det lukkede intervallet $[-1, 0]$.