

OBLIG 2, MAT1100, H2024
Løsningsforslag

Oppgave 1. La funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ når } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ når } x = 0. \end{cases}$$

Løsning: (a) Funksjonen er kontinuert i $a = 0$ dersom

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Vi har at x^3 går mot 0 når $x \rightarrow 0$. Videre går $-\frac{1}{x^2}$ mot $-\infty$ når $x \rightarrow 0$, så $e^{-\frac{1}{x^2}}$ går mot 0 når $x \rightarrow 0$. Det kan se ut til at vi vil bruke L'Hopitals regel for et $0/0$ -uttrykk for $f(x)$. Om vi prøver dette, med $e^{-\frac{1}{x^2}}$ i telleren og x^3 i nevneren, finner vi før eller siden ut av at vi ikke kommer i mål: akkurat som i Eksempel 6.3.12 i Kalkulus får vi høyere potenser av x i nevneren, og aldri slipper $e^{-\frac{1}{x^2}}$ i telleren. Så da følger vi ideen i Eksempel 6.3.12 og gjør om $f(x)$ til et ∞/∞ -uttrykk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-3})}{(e^{x^{-2}})} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-3})'}{(e^{x^{-2}})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-3x^{-4})}{(-2x^{-3}e^{x^{-2}})} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-4+3}}{e^{x^{-2}}} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{e^{x^{-2}}} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^{-2}}{-2x^{-3}e^{x^{-2}}} \\ &= \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{x^{-2}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi sette $u = \frac{1}{x}$, bytte grenser og bruke l'Hopital på et ∞/∞ -uttrykk:

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} u^3 e^{-u^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^3}{e^{u^2}} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{3u^2}{e^{u^2} 2u} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{3u}{2e^{u^2}} \\ &\stackrel{l'H}{=} \frac{3}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{u^2} 2u} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Man kan også bruke setning 6.3.15b) allerede i første linje.

(b) Funksjonen er deriverbar i $a = 0$ dersom $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ eksisterer. (Merk at det var viktig å sjekke kontinuitet i punktet 0 først. Ifølge Setning 6.1.9 kan ikke en funksjon være deriverbar i et punkt der den ikke er kontinuerlig.) Ved å bruke l'Hopitals regel som i punkt a) finner vi at:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-4})}{(e^{x^{-2}})} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-4})'}{(e^{x^{-2}})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-4x^{-5})}{(-2x^{-3}e^{x^{-2}})} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-5+3})}{e^{x^{-2}}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{e^{x^{-2}}} \\ &\stackrel{l'H}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-2})'}{(e^{x^{-2}})'} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2x^{-3})}{(-2x^{-3}e^{x^{-2}})} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^{-2}}} = 0.\end{aligned}$$

Vi konkluderer at f er deriverbar i 0 og at $f'(0) = 0$.

Alternativt kan vi også her sette $u = \frac{1}{x}$, bytte grenser og bruke l'Hopital på et ∞/∞ -uttrykk:

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} u^4 e^{-u^2} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^4}{e^{u^2}} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{4u^3}{e^{u^2} 2u} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{4u^3}{2e^{u^2}} \\ &\stackrel{l'H}{=} 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{3u^2}{e^{u^2} 2u}.\end{aligned}$$

Dette gir tilsvarende regning (eller argumentasjon med 6.3.15b)) som i a):

$$\begin{aligned}&= 3 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^{u^2}} \\ &\stackrel{l'H}{=} 3 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{u^2} 2u} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Oppgave 2.

Den etterspurte buelengden til funksjonen $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}$ er gitt ved

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Vi har at $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 - \frac{1}{12x^2}$, og dermed er

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + \left(3x^2 - \frac{1}{12x^2}\right)^2} dx.$$

Vi regner videre i integralet og finner at

$$\begin{aligned}L &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + \left((3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{(12x^2)^2}\right)} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + (3x^2)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{(12x^2)^2}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{(3x^2)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{(12x)^2}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\left(3x^2 + \frac{1}{12x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(3x^2 + \frac{1}{12x^2}\right) dx\end{aligned}$$

Ved analysens fundamentalteorem blir dette lik

$$\begin{aligned} L &= \left[x^3 - \left(\frac{1}{12x} \right) \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= 2^3 - \left(\frac{1}{12 \cdot 2} \right) - \left(\frac{1^3}{2} - \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{2}} \right) \\ &= 8 - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 8. \end{aligned}$$

Oppgave 3.

Her bruker vi teknikkene fra seksjon 9.3 om delbrøkkoppspaltning. Den generelle regelen er beskrevet i øverste halvdel av side 498 i Kalkulus, og en brøk som ligner veldig på integranden i det oppgitte integralet er å finne i trinn 3. av Eksempel 9.3.8. Vi skal altså dele opp brøken til formen

$$\frac{6x^2}{(x-2)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

hvor A, B, C er konstanter. (Vi kan først raskt sjekke at $x^2 - x + 1$ ikke har noen reelle røtter, siden om vi prøver løse $x^2 - x + 1 = 0$ som $ax^2 + bx + c = 0$ etter a, b, c -formelen blir $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$.)

Etter multiplikasjon med fellesnevneren får vi, ved at sammenligne telleren på venstre og høyre side at

$$6x^2 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x - 2).$$

Høyresiden er $Ax^2 - Ax + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$. Vi setter koeffisientene til samme potens av x , inklusive konstantleddet, til å være like, og får ligningssystemet

$$A + B = 6, \quad -A - 2B + C = 0, \quad A - 2C = 0.$$

Dette løser vi for eksempel som følger: av første ligning er $B = 6 - A$ og av siste ligning er $C = A/2$. Settes disse inn i midterste ligningen, får vi

$$-A - 2(6 - A) + \frac{1}{2}A = 0,$$

så $3/2A = 12$ og $A = 8$. Da er $B = -2$ og $C = 4$. Integralet kan da skrives

$$(1) \quad \int \frac{6x^2}{(x-2)(x^2-x+1)} dx = \int \frac{8}{x-2} dx + \int \frac{-2x+4}{x^2-x+1} dx.$$

Det første integralet: Det første integralet i (1) er lik $8 \ln |x - 2| + C_1$, der C_1 er en konstant.

Det andre integralet: Det andre integralet i (1) jobber vi videre med ved å bruke metoden fra Eksempel 9.3.6: vi deriverer nevneren og får $(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$, og prøver å omforme telleren $-2x + 4$ slik at det ligner på denne deriverte. Her ser

vi straks at $-2x + 4 = -(2x - 1) + 3 = -(x^2 - x + 1)' + 3$. Vi skriver det andre integralet i (1) på formen

$$\int \frac{-2x + 4}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{-2x + 1}{x^2 - x + 1} dx + \int \frac{3}{x^2 - x + 1} dx.$$

Det andre integralet - del 1: Her blir det første integralet lik $\ln(x^2 - x + 1) + C_2$, der vi kan sløyfe absoluttverditegn fordi andregradspolynomet er positivt for alle verdier av x .

Det andre integralet - del 2: Det gjenstår å bestemme integralet

$$\int \frac{3}{x^2 - x + 1} dx,$$

og her bruker vi teknikken fra Eksempel 9.3.5: vi samler leddene med x i nevneren til et fullstendig kvadrat på formen $(c + d)^2$ eller $(c - d)^2$, eller i samlet kortfattet form $(c \pm d)^2$. Vi skal også legge til eventuelle konstanter som er til overs. I et fullstendig kvadrat har vi $(c \pm d)^2 = c^2 \pm 2cd + d^2$, så med $c = x$ må vi skaffe oss faktoren 2 ved rett og slett å skrive $1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$ samt vi må skaffe oss d^2 . Vi ser at

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Vi faktorerer ut konstantleddet som var til overs i nevneren, forkorter der vi kan og får

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= 4 \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dx \\ &= 4 \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Nå er vi klare til substitusjonen $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, slik at vi får $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$, og setter inn i siste integralet for å få

$$4 \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = 4 \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{u^2 + 1} du = 2\sqrt{3} \int \frac{1}{u^2 + 1} du.$$

Dette er lik $2\sqrt{3} \arctan(u) + C_3 = 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_3$, med C_3 en konstant.

Til slutt samler vi integralene over og får totalt

$$\int \frac{6x^2}{(x-2)(x^2-x+1)} dx = 8 \ln|x-2| + \ln(x^2-x+1) + 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

der C er en konstant ($C = C_1 + C_2 + C_3$).