MAT1100 Forelesning 8

Kapittel 4.3

Monotone følger

Definisjon: En følge $\{a_n\}$ er *voksende* dersom $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n.

Eksempel: $a_n = \frac{n-1}{n}$, eller $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{n}{n+1} \geq \frac{n-1}{n} \iff n^2 \geq (n-1)(n+1)$$
$$\iff 0 \geq -1 \text{ passer.}$$

Definisjon: En følge $\{a_n\}$ er *avtagende* dersom $a_{n+1} \leq a_n$ for alle n.

Eksempel: $a_n = \frac{n+1}{n}$, eller $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$.

Feller: $\{a_n\}$ kalles monoton dersom den er avtagende eller voksende.

Definisjon: $\{a_n\}$ kalles *begrenset* dersom det eksisterer et reelt tall $M > 0$ slik at $|a_n| \leq M$, for alle n.

Så: $-M \leq a_n \leq M$ for alle n.

Derfor er $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er begrenset, som mengde.

Eks: $\{\frac{n-1}{n}\}$, $\{\frac{n+1}{n}\}$

Teorem 4.3.9 (Viktig og nyttig). Enhver monoton og begrenset følge er konvergent.

Bevis: Tilfellet hvor vi har $\{a_n\}$ voksende og begrenset. Vi har M:

$-M \leq a_n \leq M$, alle n.

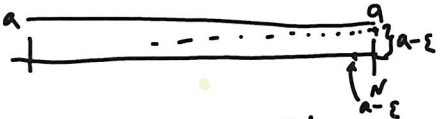
Kompletthetsprinsippet for $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gir oss at det finnes $\sup\{a_n \mid n\}$.

Vi kaller dette a. Viser nå: $a_n \to a$ for $n \to \infty$. a = minste øvre skranke

Vi gir et $\varepsilon > 0$. Ønsker et $N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$ for $n \geq N$.

eller: $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ for $n \geq N$.

eller $-\varepsilon < a - a_n < \varepsilon$ for $n \geq N$.



$a - \varepsilon < a_n$

$a - \varepsilon$ er ikke en øvre skranke for $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Derfor finnes det et N: $a - \varepsilon < a_N$.

For $n \geq N$ er $a_n \geq a_N > a - \varepsilon$. Så $a - a_n < \varepsilon$ } som ønsket.

Men a er en øvre skranke så $-\varepsilon < 0 \leq a - a_n$

Anvendelse av teoremet

Definerer $\{a_n\}$: $a_1 = 1$, $a_{n+1}^2 = 4 + 3a_n$. Er den konvergent? Hva er i så fall grensa?

$a_2 = \sqrt{4+3a_1} = \sqrt{7} \sim 2.6 > a_1$.

Vi prøver å vise: $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n. Bruk induksjonsprinsippet.

P_1: $a_2 \geq a_1$.

P_k: $a_{k+1} \geq a_k$ holder.

P_{k+1}: Er det sant at $a_{k+2} \geq a_{k+1}$?

$a_{k+2} = \sqrt{4+3a_{k+1}}$ (setter $k+1$ i stedet for n i formelen)

$\geq \sqrt{4+3a_k}$ siden $3a_{k+1} \geq 3a_k$ og $4+3a_{k+1} \geq 4+3a_k$

dermed $\sqrt{4+3a_{k+1}} \geq \sqrt{4+3a_k}$

Så $a_{n+1} \geq a_n$ for alle n.

Er $\{a_n\}$ begrenset? $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{7} < 3$, $a_3 = \sqrt{4+3\cdot a_2} < \sqrt{13} < 4$.

Prøver å vise med induksjon at $a_n < 4$ for alle n.

P_1: $a_1 < 4$. (sant.)

P_k sier at $a_k < 4$. Da er $4+3a_k \leq 4+3\cdot 4 \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{4+3a_k} \leq \sqrt{16} = 4$. Så P_{k+1} er sant.

Ved induksjonsprinsippet er $\{a_n\}$ begrenset med $a_n < 4$ for alle n.

Teoremet gir at: $\{a_n\}$ er konvergent. La $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Da er $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{4+3a_n}) = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(4+3a_n)}$.

Men $\lim_n (4+3a_n) = 4+3a$, så $\sqrt{4+3a} = a$. Løser: $a^2 - 3a - 4 = 0$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \nearrow \boxed{a = 4}, \quad \searrow a = -1.$$

Et enklere bevis: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = (\lim_{n\to\infty} a_{n+1})^2$

$= (\lim_{n\to\infty} a_n)^2$

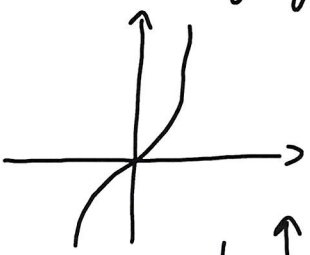
$= a^2 = 4 + 3a = \lim_{n\to\infty}(4+3a_n)$

Løser $a^2 - 3a - 4 = 0$ for å finne a.

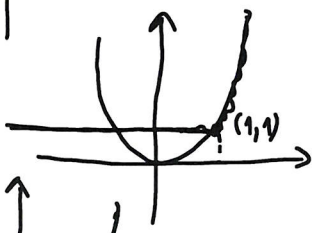
Kapittel 5.1 Kontinuerlige funksjoner

Eks: 1) $f(x) = x^3$

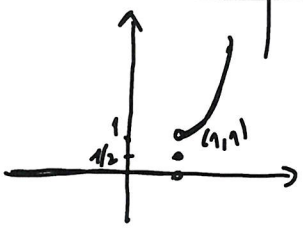
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når } x \geq 1 \\ 1 & \text{når } x < 1 \end{cases}$

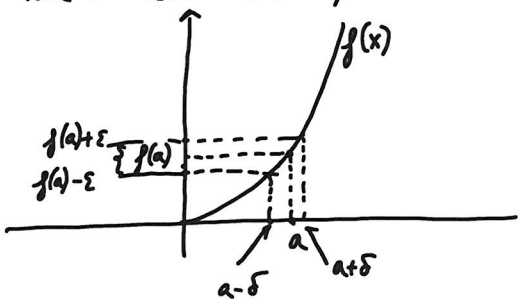


3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{når } x = 1 \\ 0 & \text{når } x < 1 \end{cases}$



4) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{når } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Hva er kontinuitet, intuitivt?



At f er kontinuerlig i a betyr at

$|f(x) - f(a)|$ kan gjøres så lite vi vil ($\varepsilon > 0$ så liten vi vil)

bare vi klarer å gjøre

$|x - a|$ liten nok ($\delta > 0$ liten nok).

For oss, en funksjon f er en tilordning

$x \rightsquigarrow f(x)$



mengde av punkter i $\mathbb{R}$

D_f = definisjonsmengden til f

Skriver

$\boxed{f: D_f \to B}$

$B = \mathbb{R}$ eller en delmengde av $\mathbb{R}$.

Eks (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ · Hvilke verdier x gir dette mening for?

$x^2 - 4 > 0$, så $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Eksempel: (b) $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$; krever $x^4 - x^2 \geq 0$

$x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$

x		-1		0		1	
x^2	$+$	$+$	0	$+$	$+$		
$x-1$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$		$+$	
x^4-x^2	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$D_f = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$.

Definisjon En funksjon f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ dersom:
for enhver $\varepsilon > 0$ (så liten vi vil) finnes det en $\delta > 0$ (liten nok)
slik at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ når $|x-a| < \delta$ og $x \in D_f$.

Eksempel: Vis at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x+2$ er kontinuerlig i $a = 4$.

Løsning: $f(a) = 5 \cdot 4 + 2$

Gitt $\varepsilon > 0$. Ser på $x - a$, $x \in D_f = \mathbb{R}$.

Setl $h = x - a$. Ønsker å finne $\delta > 0$ så $|h| < \delta$ sikrer at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. ↪ $x = h + a$

Ser på $|f(x) - f(a)| = |f(h+a) - f(a)| = |(5(h+4)+2) - (5\cdot 4 + 2)|$ Ønsker

$= |5h + 22 - 22| = |5h| = 5|h| < \varepsilon$

Hvis $|h| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta$.

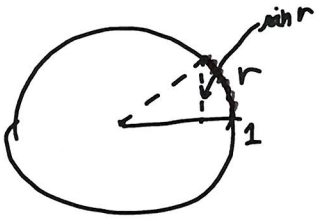
klart at $5|h| < \varepsilon$.

Eksempel: $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$.
Vis at f er kontinuerlig i et $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Gitt $\varepsilon > 0$, ser på $|\cos x - \cos a|$.

$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$
$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$
$-\cos(s+t) + \cos(s-t) = 2 \sin(s) \sin(t)$
($s+t = x$, $s-t = a$)

Vi har, at $|\cos x - \cos a| = |2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}|$



$= 2 \cdot |\sin \frac{x+a}{2}| \cdot |\sin \frac{x-a}{2}|$

≤ 1

$\leq 2 |\sin \frac{x-a}{2}|$. Men $|\sin r| \leq |r|$.

$\leq 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| = |x-a|$. Velg nå $\delta = \varepsilon$.

Når $|x-a| < \delta$ er da $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$.
som ønsket

Regneregler

Hvis f og g er kontinuerlige i et punkt a i D_f og i D_g, er $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ kontinuerlige i a. Dersom $g(a)\neq 0$, er også $\frac{f}{g}$ kontinuerlig i a.

Vi vet (fra skolematikken) at a^x, x^r, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, konstante er kontinuerlige på deres definisjonsområde.

Eks: $f(x)=\dfrac{2\cos x+\sqrt{x}}{7x^2+\sin x}$ er kontinuerlig i $a=\frac{\pi}{4}$.

$\cos x$, $2\cos x$, $\sqrt{x}$ er kontinuerlige i $\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $2\cos x+\sqrt{x}$ kont. i a.

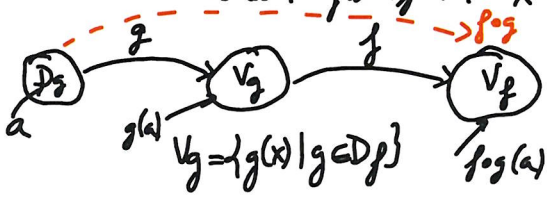
$7x^2$, $\sin x$ er kont. i $\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $7x^2+\sin x$ kont. i a

$7(\frac{\pi}{4})^2+\sin\frac{\pi}{4}\neq 0$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{2\cos x+\sqrt{x}}{7x^2+\sin x}$ kont. i a.

Hva med $\cos x^5$? Sammensatt funksjon: x^5 så cos

Setning



. Lag $f\circ g$

Dersom g er kontinuerlig i a i D_g og f er kontinuerlig i $g(a)$, så er $f\circ g$ kontinuerlig i a

Eks: $g(x)=x^5$ er kont i $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ er kontinuerlig i $(\frac{\pi}{2})^5$, så $f(x)=\cos x^5$ er kontinuerlig i $\frac{\pi}{2}$.

Definisjon: En funksjon f definert på D_f kalles kontinuerlig dersom f er kontinuerlig i alle $a\in D_f$.

Eks: 1) $f(x)=\cos x$, $\sin x$

2) $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$, $D_f=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,\infty)$.

{0} er bare mengden av punktet 0.

$f(x)=k\circ g(x)$, $g(x)=x^4-x^2$ kont overalt

$k(x)=\sqrt{x}$ kont. på $[0,\infty)$