MAT 1100 07.11.2024

EKS 12.2.5 (variant)

Konvergerer eller divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

- Se på $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ er positiv kontinuerlig for $x \geq 0$. avtagende (sjekke?)

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

SUBST

$u = \frac{1}{x}$

$du = -\frac{1}{x^2} dx$

$= \int_{x=1}^{x=\infty} -e^u du$

$= \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^{\infty} = -1 + e$, så def konvergerer

V/ integraltesten konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}$.

SAMMENLIKNINGSTESTEN

SETN. 12.2.6.

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker

i) Anta $\sum a_n$ konvergerer (for alle ↓)
og det fins c slik at $b_n \leq c a_n \; \forall n$.

Da konvergerer $\sum b_n$

ii) Anta $\sum a_n$ divergerer
og det fins $d>0$ slik at $b_n \geq d a_n \; \forall n$.

Da divergerer $\sum b_n$.

BEVIS i) $\sum a_n$ konvergerer $\overset{12.1.7}{\Rightarrow}$ $\sum c a_n$ konvergerer

- $\sum_{n=1}^{N} b_n \leq \sum_{n=1}^{N} c a_n \leq M = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ for alle N
- Da er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ begrenset og dermed konvergent

EKS 12.2.7 (VAR)

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{5n^4-1}$ konvergerer eller divergerer.

Se på $\frac{n^3+1}{5n^4-1} > \frac{n^3+1}{5n^4} > \frac{n^3}{5n^4} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n}$

b_n a_n

Vet at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, så $\sum_{n=1} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n}$ divergerer,

og derfor også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{5n^4-1}$.

GRENSESAMMENLIKNINGSTESTEN

SETN 12.2.8

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være to positive rekker

i) Anta $\sum a_n$ konvergerer og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty,$$

Da konvergerer også $\sum b_n$.

ii) Anta $\sum a_n$ divergerer og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0.$$

Da divergerer også $\sum b_n$.

EKS 12.2.9 (VAR)

Konvergerer eller divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+3n}{7n^5-2}$?

Se på leddene og henter høyeste potens:

$$\frac{n^2\left(5+\frac{3}{n}\right)}{n^5\left(7-\frac{2}{n^5}\right)} = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\left(7-\frac{2}{n^5}\right)}$$

- Vi vet (fra sist) at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergere
- Se på $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2+3n}{7n^5-2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\left(7-\frac{2}{n^5}\right)} = \frac{5}{7} \neq \infty$
- Så ved g.s.k. vil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+3n}{7n^5-2}$ konvergere.

OBS: Ofte skalle om å bruke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ....

EKS 12.2.10.

Konvergerer eller divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1)$

- $T_1(e^x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} x^k$

$= x + 1$,

- $e^x = T_1(e^x) + R_1(e^x)$

$e^x = x + 1 + R_1(e^x)$

$(e^x - 1) = x + R_1(e^x)$

$(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{n} + R_1(e^{\frac{1}{n}})$

HUSK $|R_n(e^x)| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}$, $c \in [0, x]$

$|R_1(e^{\frac{1}{n}})| \leq \frac{e^c}{2!} \left|\frac{1}{n}\right|^2$, $c \in [0, \frac{1}{n}]$

$\leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{2n^2}$

Så $(e^{\frac{1}{n}} - 1) \approx \frac{1}{n}$

- Se på $\sum b_n = \sum e^{\frac{1}{n}} - 1$

og $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$

- Vet at $\sum \frac{1}{n}$ divergerer

og $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} = 1$ V

0

- Ved g.s.k. ii) vil $\sum (e^{\frac{1}{n}} - 1)$ divergere

EKS 12.2.11.

Konvergerer eller divergerer $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$?

- Sammenlikner med $\sum \frac{1}{n^p}$ med p utjent...
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{n^{-p}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n^2}}{p n^{-p-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1}}{p(1+n^2)}$$

$p=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergerer (sml. med $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1 > 0$$

Så ved g.s.k. ii) vil $\sum\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right)$ divergere.

12.2.12 (12.4.5)

FORHOLDSTESTEN FOR POSITIVE REKKER

La $\sum a_n$ være en positiv rekke og anta $a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Da gjelder:

i) Hvis $a < 1$, konvergerer rekken
(pga "geometrisk rekke med $|r|<1$")

ii) Hvis $a > 1$, divergerer rekken
(voksende ledd)

iii) Hvis $a = 1$, ingen konklusjon.

SPM: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, så ingen konklusjon.
(testen fungerer ikke.)

EKS 12.2.13 (VAR)

Konvergerer eller divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{5} < 1,$$

Altså konvergerer følgen.

EKS 12.2.15

Konvergerer eller divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ved forholdstesten?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{-1}{(n+1)^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \ldots = 1, \qquad \frac{n^2}{n^2+2n+1}$$

så uendelig å avgjøre ...

12.2.16 (12.4.6)

ROTTESTEN FOR POSITIVE REKKER

La $\sum a_n$ være en positiv rekke

og anta $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer

ELLER

$a = \infty$.

Da gjelder:

i) Hvis $a < 1$, konvergerer rekken

ii) Hvis $a > 1$, divergerer rekken

iii) Hvis $a = 1$, har vi ingen konklusjon.

EKS 12.2.7

K eller D $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} < 1,$$ så rekken konvergerer.

12.3. ALTERNERENDE REKKER

DEF: En rekke $\sum a_n$ kalles ALTERNERENDE dersom to påfølgende ledd alltid har motsatte fortegn.

EKS $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

SETNING 12.3.1.

- Anta • $\sum a_n$ er en alternerende rekke
  - $|a_n|$ er ① avtagende mot ② 0.

  Da er rekken konvergent.

- Summen S og en delsum $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ tilfredsstiller

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

EKS: 12.3.2.

- Skal vise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergerer
  - $|a_n| = \frac{1}{n}$, avtar og går mot 0.

  Så $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ er konvergent!

- $\frac{1}{10} = |a_{10}| \geq |S - s_9|$

$$S \approx s_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} \approx \underline{0{,}75}.$$

BEVIS - SKISSE

- $s_0 = a_0$

  $s_2 = s_0 + \underbrace{a_1 + a_2}_{\text{0 fordi } |a_1| > |a_2|, \text{ men } a_1 \text{ negativ}}$ $\Big\}\ s_0 > s_2$

  $s_0 > s_2 > s_4 > \dots > s_0 + a_1 = s_1$

  $\{s_{2n}\}$ avtagende følge begrenset av s_1

- $s_1 = a_0 + a_1 > 0$

  $s_3 = s_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{<0} > s_1$

  $0 < s_1 < s_3 < \dots < s_0$

  $\{s_{2n+1}\}$ voksende følge begrenset av s_2.

12.4. ABSOLUTT OG BETINGET KONVERGENS.

DEF 12.4.1.

Rekke $\sum a_n$ KONVERGERER ABSOLUTT hvis $\sum |a_n|$ konvergerer.

DEF 12.4.3. Hvis rekken ikke er absolutt konvergent (men allikevel konvergerer), kalles den betinget konvergent

SETN. 12.4.2.

En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent

BEVIS: $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$

12.4.5. GENERALISERT FORHOLDSTEST ROTTEST

La $\sum a_n$ være en rekke

og anta at

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a \quad \text{(eller lik } \infty\text{)}$$

Da gjelder

i) $a < 1$, konvergerer rekken absolutt

ii) $a > 1$, divergerer rekken

iii) $a = 1$, ingen konklusjon