26/08/2024

MAT 1100 Forelesning 4

Kapittel 1.4 Pascals trekant og binomialformelen

Minner om:

Gitt n naturlig tall, og k et naturlig tall mindre enn n, vi definerer binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$, leses n over k, (eller n velg k) ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Vi setter $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$.

Merk: $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$.

Betydning: $\binom{n}{k}$: antallet av uttak av k gjenstander ut av n gjenstander.

Setning 1.4.2 Binomialformel

Det gjelder, at $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

Med andre ord:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n.$$

Først, vi har:

Lemma 1.4.4 For alle naturlige tall n og i med $i \leq n$, er $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$.

Bevis: Regn ut V.S mot H.S. Eller kombinatorisk bevis (se boka).

26/08/2024
(2)

Anvendelse:
Pascals trekant:

$\binom{0}{0}$ $n=0$ — 1

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ $n=1$ — 1 1

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ $n=2$ — 1 2 1

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$ $n=3$ — 1 3 3 1

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$ $n=4$ — 1 4 6 4 1

Pascals trekant

... Fortsett nedover.

$\frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 2\cdot 3 = 6$

Induksjonsbevis for binomialformelen: Ønsker $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

(I) P_1: $(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i} b^i = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1$

$= 1\cdot a + 1\, b = a+b$, stemmer.

(II) Antar P_k er sann: $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$.
k naturlig

i: notasjon for indeks for summen fra 0 til k

Sjekker P_{k+1}

$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$= (a+b)\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i\right)$ ⊛

j: notasjon for indeks for summen fra 0 til k+1

For et $j \le k+1$
Ledd på formen $a^{k+1-j} b^j$

$\rightarrow a \cdot \binom{k}{j} a^{k-j} b^j$ ⇝ har $\binom{k}{j}$ av disse

$\rightarrow b \cdot \binom{k}{j-1} \underbrace{a^{k+1-j} b^{j-1}}_{a^{k-(j-1)} b^{j-1}}$ ⇝ har $\binom{k}{j-1}$ av disse

I alt, ved forrige resultat, vi har

$\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ ledd på formen $a^{k+1-j} b^j$. Tilbake til ⊛

$(a+b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} b^j$. Så P_{k+1} holder.

Ved induksjonsprinsippet er binomialformelen gjeldende.

Litt om $\binom{n}{k}$: antallet av k uttak ut av n (forskjellige, uten tilbakelegging) gjenstander. 26/08/2024 (3)

Eksempel: 5 farger G(gul), R(rosa), L(lila), O(orange), B(blå)
ønsker ta ut 2.

Velg først en farge: farge 2

G dernest GR, GL, GO, GB — 4 muligheter for 2 farger

L dernest LG, LR, LO, LB — 4 —

O OG, ... — 4 —

B ... — 4 —

R ... — 4 —

↑

5 muligheter, 4 muligheter

I alt: $5 \cdot 4 = n \cdot (n-2+1)$, $n=5$, $k=2$, med forskjell på rekkefølgen av uttak.

Men, $\frac{5 \cdot 4}{2!}$ = antallet av valg av 2 (farge, gjenstander) ut av 5 hvor vi ikke bryr oss om rekkefølgen.

Så: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

Generelt: n forskjellige gjenstander, ønsker ta ut k, med $k \leq n$, ut av disse. Hvor mange måter kan dette gjøres på?

Uttak 1 av k: har n muligheter
Uttak 2 av k: -11- (n-1) -11-
3 av k: -11- (n-2) -11-
⋮
k: n-(k-1) -11-

} i alt gir dette $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ mulige uttak hvor vi har valgt rekkefølgen på de k gjenstander

Men, k gjenstander kan arrangeres etter hverandre på $k!$ måter, med $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

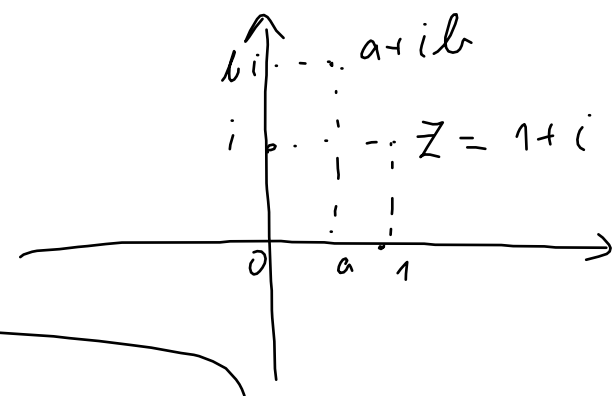
I alt er $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$ antallet av måter å ta ut k gjenstander ut av n forskjellige. Og, $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Betegnes $\binom{n}{k}$, eller $C(n,k)$.

F4 26/08 202

Komplekse eksponentialer

Her: $i^2 = -1$



Har definert: for $z = a+ib$

setter $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$.

Har vist at for z, w komplekse tall er $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

De Moivres formel (3.3.5) Gitt θ reelt, vi har for alle naturlige tall at $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Anvendelse av binomialformelen: regne ut formler for $\cos(n\theta)$ og $\sin(n\theta)$ ved hjelp av $\cos\theta$ og $\sin\theta$.

Notasjon: skriver $(\cos\theta)^n = \cos^n\theta$ og $(\sin\theta)^n = \sin^n\theta$.

Eksempel: $n=3$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (a+b)^3 = \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} a^{3-j} b^j = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a = \cos\theta$, $b = i\sin\theta$

ved binomialformelen

$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot (i\sin\theta) + 3\cos\theta (i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$i^2 = -1$ $i^3 = -i$

$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$

De Moivre → $= \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$.

Ved bruk av $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, får vi:

$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, og

$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

Korollar 3.3.7 Gitt θ reelt og n naturlig tall, vi har:

$$\cos(n\theta) = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \dots$$

$$\sin(n\theta) = n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \dots$$