MAT 1100 Forelesning 5

Kapittel 3.4

De Moivres formel: for θ reelt (θ = theta), n naturlig tall,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Eksempel på bruk av denne:

Regn ut $(1+i\sqrt{3})^{11}$.

Løsning: Sett $z = 1+i\sqrt{3}$. Så $a = \mathrm{Re}(z) = 1$ og $b = \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$.

Polarform: $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.

Har at $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ og $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ for θ et argument for z.

Vi velger $\theta = \frac{\pi}{3}$, den entydige vinkel i første omløp med disse verdiene.

Da er $z^{11} = r^{11}(\cos\theta + i\sin\theta)^{11} = 2^{11}(\cos(11\theta) + i\sin(11\theta))$ ved De Moivres formel

$$= 2^{11}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{11}\left(\cos\left(\frac{12\pi - \pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi-\pi}{3}\right)\right)$$ (ta ut et multiplum av 2π i det nye argumentet)

$$= 2^{11}\left(\cos\left(2\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\cdot 2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{11}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$ ved 2π-periodisk egenskap av cos og sin

$$= 2^{11}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ siden cos er en like funksjon og sin er en ulike funksjon

$$= 2^{11}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{10}(1 - i\sqrt{3}).$$

Kapittel 3.4 n-røtter til komplekse tall. F5 27/08/2024 (2)

For $a=16$ er $+4$ og -4 reelle røtter til a.

(siden $4^2=(-4)^2=16$).

Det samme for a positivt: $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ er reelle røtter.

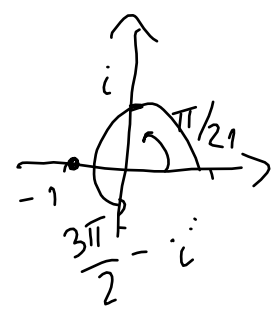
Hva med -1? $w^2=-1$ løses av både $w_1=i$ og $w_2=-i$.

$w_1^2=i^2=-1$ ved definisjon

$w_2^2=(-i)^2=(-i)\cdot(-i)=i^2=-1$.

I polar form: løser $w^2=z$ for $z=-1$.

$z=\cos\pi+i\sin\pi$, velg $\theta=\pi$ et argument



$w_1=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ og $w_2=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$.

$=\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}$

$=\cos\frac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}$

$=\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}$.

Definisjon 3.4.1

Gitt $z \in \mathbb{C}$ og n naturlig tall. Et tall $w \in \mathbb{C}$ som oppfyller

$$w^n = z$$

kalles et n-rot til z.

For $n=2$ snakker vi om kvadratrot.

Setning Gitt $z = re^{i\theta}$ med $z \neq 0$, gitt n naturlig tall, da har z nøyaktig n forskjellige n-røtter, og er gitt ved:

$$w_0 = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1 = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$w_2 = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\cdot 2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$w_{n-1} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

$$w_0^n = \left(r^{1/n}\right)^n\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n$$
$$= r\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\cdot n\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\cdot n\right)\right)$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$$

Tilsvarende regnestykker viser at $w_1^n = \ldots = w_{n-1}^n = z$ ved De Moivres formel.

Merk: $w_n = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)$

$$= r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)\right) = w_0.$$

Har, at: $w_1 = w_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $w_2 = w_1 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}$ $\ldots$, $w_{n-1} = w_{n-2}\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Eksempel: Finn 3-røttene til -27.

$z = -27 = 27\cdot(-1) = 27(\cos\pi + i\sin\pi)$, $r = 27$, $\theta = \pi$.

Har 3 3-røtter til z:

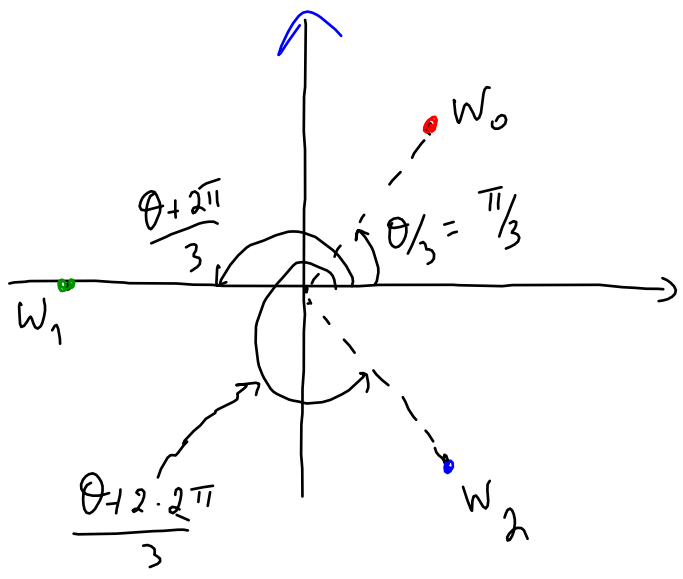
$w_0 = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right) = 27^{1/3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + i\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$w_1 = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right) = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = -3$, og

$w_2 = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2\cdot2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\cdot2\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$= 3\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$w_0 = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)$

$w_1 = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right)$

$= r^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Produktregel: $(r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))\cdot(r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)) = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$.

Så $w_1 = \left(r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)\right)\cdot\left(1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= w_0\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Også $w_2 = r^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= \underbrace{\left(r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\right)}_{w_1}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = w_1\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Eksempel: Finn 4-røttene til $z = -1 + i\sqrt{3}$. 27/08/2024

Polar form $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Velg $\theta = \frac{2\pi}{3}$ i første omløp.

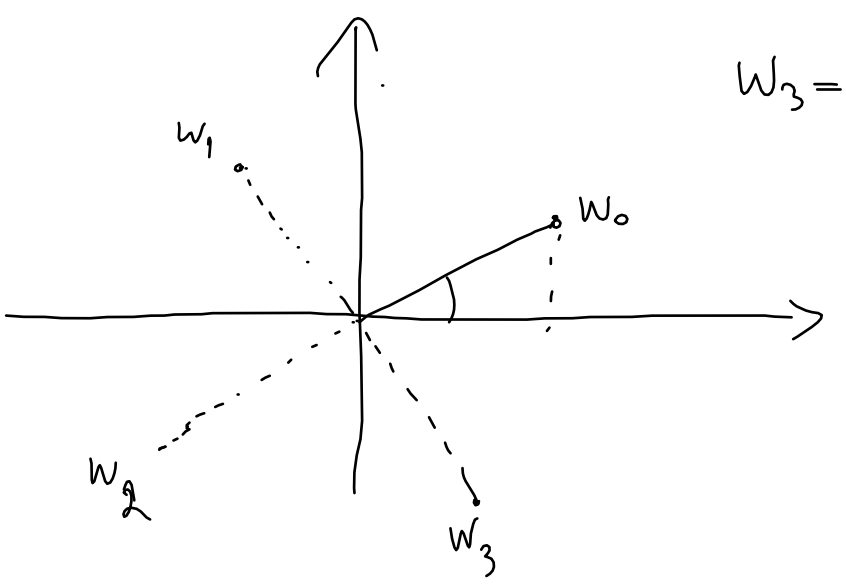
Har $w_0 = 2^{1/4}\left(\cos\frac{\theta}{4} + i\sin\frac{\theta}{4}\right) = 2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2^{1/4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)$

$w_1 = w_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = w_0 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = w_0 \cdot i = 2^{1/4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ↓ gang med i

$w_2 = w_1 \cdot i = 2^{1/4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right)$ ↓ $-4-$

$w_3 = w_2 \cdot i = 2^{1/4}\left(+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ↓ $-4-$



Komplekse andregradsligninger

$aX^2+bx+c=0$ a,b,c reelle ; hvis $b^2-4ac>0$

løsninger $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(a\neq 0)$

Løsninger til $az^2+bz+c=0$, a,b,c komplekse, $a\neq 0$,

er gitt: $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Konvensjon: gitt w komplekst tall, ved $\sqrt{w}$ mener vi den kvadratroten som har argument i $[0,\pi)$.

Gitt: a,b,c reelle, $a\neq 0$.

Hvis $b^2-4ac<0$, er $b^2-4ac=(-1)\cdot(4ac-b^2)$ og $(-1)=i^2$, $4ac-b^2>0$

løsningene er $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ og $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Merk $z_2=\overline{z_1}$.

Vi har: $\boxed{az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-\overline{z_1})}$.

Eks: $z^2-3z+9=0$ $b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 9=9\cdot(-3)\to(i\sqrt{3})^2$

$z_1=\dfrac{3+i\cdot 3\sqrt{3}}{2}$, $\overline{z_1}=\dfrac{3-i\cdot 3\sqrt{3}}{2}$.

Kap. 3.5 Et n-te grad polynom er et uttrykk:

$P_n(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\dots+c_1z+c_0$, $c_n,c_{n-1},\dots,c_0$ er komplekse, $c_n\neq 0$.

Algebraens fundamentalsetning

For et n'te grads polynom det finnes komplekse tall $r_1,r_2,\dots,r_n$ slik at

$P_n(z)=c_n(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$ for alle komplekse tall z.

For $n=2$ røttene er komplekskonjugerte til hverandre hvis de er komplekse tall.

Eksempel: $P(z)=z^4-z^3+8z-8$, reelle koeffisienter.

Vi får gitt at $w=1+i\sqrt{3}$ er en rot, så $P(w)=0$. Hvordan finner vi de andre?

$\overline{w}=1-i\sqrt{3}$ også rot (gjelder generelt for polynomer med reelle koeffisienter).

$(z-w)(z-\overline{w})=z^2-z\overline{w}-zw+w\overline{w}$

$=z^2-2z+4$.

$(z^4-z^3+8z-8)=(z^2-2z+4)(z^2+z-2)$

$w,\overline{w}$

$r_1=w$, $r_2=\overline{w}$

$r_3=-2$, $r_4=1$.

$b^2-4ac=1-4\cdot 1(-2)=9$

$\dfrac{-1\pm 3}{2}<\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}$