MAT 1100 22.08.2024

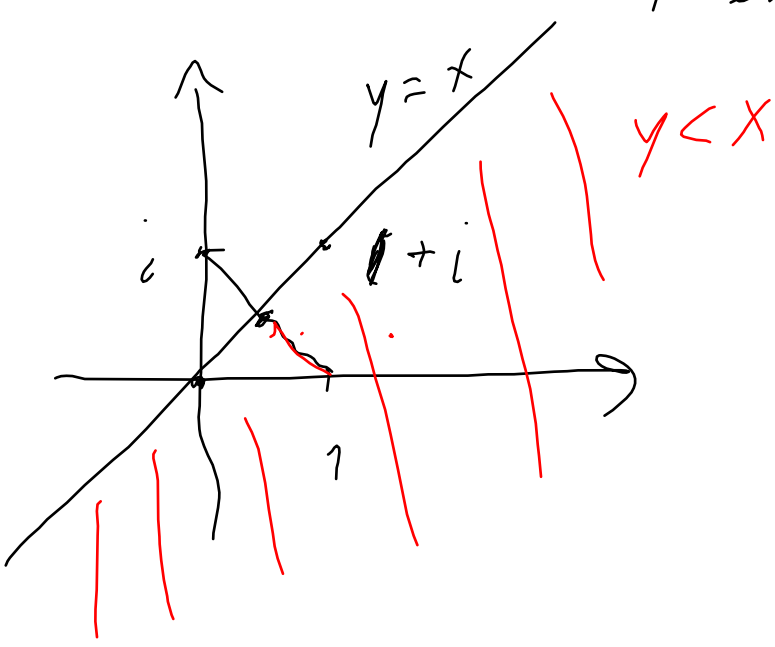
GEOMETRISK TOLKNING AV $\mathbb{C}$

EKS 3.2.6

$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z-i|\}$

HUSK
$|z-w|$
er avstanden mellom z og w

"Tall som er nærmere 1 enn i."



$z = x + i \cdot y$

$|x+iy-1| < |x+iy-i|$

$|(x-1)+i\cdot y| < |x+i(y-1)|$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} < \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

Kvadrerer

$(x-1)^2 + y^2 < x^2 + (y-1)^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 < x^2 + y^2 - 2y + 1$

$: -2|$

$-2x < -2y$

$x > y$

Halvplanet der $y < x$.

3.3 KOMPLEKSE EKSPONENTIALER

- a^n
- $e \approx 2,718281828\ldots$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

$$= \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

$$0! := 1$$

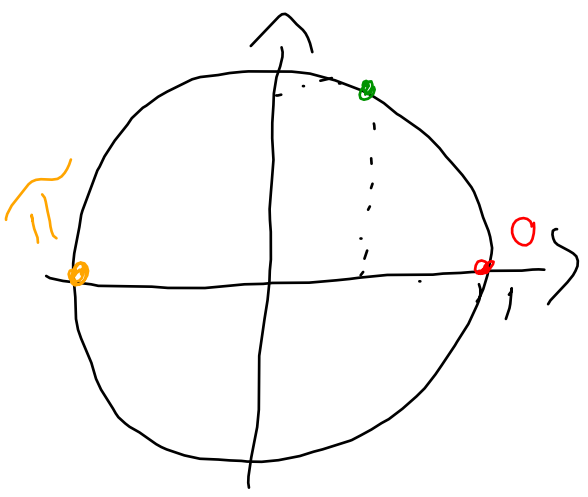
- e^x for alle $x \in \mathbb{R}$
- $e^0 := 1$

DEF 3.3.1.

For $z = a + ib \in \mathbb{C}$ defineres

$$e^z := e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$$

EKS:



① $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = x + 0\cdot i$

$$e^{x+0\cdot i} = e^{x}(\cos \underbrace{0}_{1} + i \sin \underbrace{0}_{0})$$

$$= \underline{\underline{e^{x}}}$$

② $z = 1 + i\frac{\pi}{3}$

$$e^{\underbrace{1}_{\frac{1}{2}} + i\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = e^{1}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \underline{\underline{e\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}}$$

③ $z = i\pi = 0 + i\pi$

$$e^{i\pi} = e^{0}(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$e^{0} = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0$$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

④ $z = i \cdot 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i \cdot 2\pi k} = e^{0}(\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k))$$

$$= 1(1 + i0)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

SETNING 3.3.4

For alle $z, w \in \mathbb{C}$ vi

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

spesielt vi

$$e^{n \cdot z} = (e^z)^n$$

BEVIS:

La $z = a+ib$ og $w = c+id$

med $z+w = (a+c) + i(b+d)$

V.S. $e^{z+w} = e^{(a+c)}(\cos(b+d) + i\sin(b+d))$

H.S. $e^z \cdot e^w = (e^a(\cos b + i \sin b))$

$$\cdot (e^c(\cos d + i \sin d))$$

(fra sist $z = z_1 z_2$)

$$= \underbrace{e^a \cdot e^c}_{a, c \in \mathbb{R}} (\cos(b+d) + i\sin(b+d))$$

$$e^{(a''+c)}(\cos(b+d) + i\sin(b+d))$$

VIKTIG FORENKLING

EKSPONENTIALFORM (KOMPAKT POLARFORM)

$\theta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Vi har et tall på polarform $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

BRUK (I) $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$

$= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$

$= r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

(II) $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n (e^{i\theta})^n$

$= r^n (e^{i\cdot\theta\cdot n})$

DE MOIVRES FORMEL 3.3.5

For alle $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}$ er

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

BEVIS

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$$

$$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

KAPITTEL 1
NATURLIGE TALL

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- Partall $= \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$
- Oddetall $= \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- Delelighet: $a, b, q \in \mathbb{N}$

  Hvis $\frac{a}{b} = q$, sier vi at b deler a.
- Primtallene: Et naturlig tall $p \geq 2$ som bare er delelig med 1 og p.

  $= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$
- $360 = 2 \cdot 180 = 2^2 \cdot 90 = 2^3 \cdot 45$

  $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

1.1.1 ARITMETIKKENS FUNDAMENTALTEOREM

Ethvert naturlig tall $a > 1$ kan skrives som et produkt av primtall som er entydig (opp til rekkefølge).

$a = p_1 \cdots p_n$

BEVIS: oppg 1.1.14 & 15

1.2. INDUKSJONSBEVIS

EKS 1.2.3.

Skal vise for alle $n \in \mathbb{N}$ at et utsagn P_n holder:

$$P_n: \sum_{i=0}^{n} x^i \left(= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{for } x \neq 1$$

BEVIS VED INDUKSJON

(I) Sjekk at P_0 holder

$$\text{V.S.} \sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1$$

$$\text{H.S.} \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = 1$$

H.S. = V.S.

P_0 er sann.

(II) Anta at P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

OBS: Hvis denne antakelsen gjør at P_{k+1} er sann, så har vi bevist at P_n er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

SJEKK:

$$P_{k+1}: \sum_{i=0}^{k+1} x^i = \sum_{i=0}^{k} x^i + x^{k+1}$$

ved antakelsen $= \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1}$

fellesnevner $= \dfrac{1 - x^{k+1} + x^{k+1}(1 - x)}{1 - x}$

$= \dfrac{1 - x^{k+1} + x^{k+1} - x^{k+2}}{1 - x}$ ($x^{k+1} - x^{k+1} = 0$)

$= \dfrac{1 - x^{(k+1)+1}}{1 - x}$

som var P_{k+1}!

Ved induksjon holder P_n ∎

1.2.2. INDUKSJONSPRINSIPPET

Anta at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi et utsagn P_n.

Anta at følgende holder:

Variant:
I) P_{n_0}
II) Dersom P_m er sann for alle m s.a. $n_0 \leq m < k$, så er P_k sann.

(I) P_1 er sann

(II) Dersom P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$, så er P_{k+1} sann.

Da er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

SE EKS 1.2.6.

1.4. BINOMIALFORMELEN

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= a^4 + ?a^3b + ?a^2b^2 + ?ab^3 + b^4$$

SETNING 1.3.3.

Vi kan velge k gjenstander fra n mulige på

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$ måter

BINOMIALKOEFFISIENT

$$= \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

Eks: $\binom{4}{k}$, $k = 0,1,2,3,4$ $\quad n = 4$

$$\binom{4}{4} = \binom{4}{0} = \frac{4!}{(4-0)! \cdot 0!} = \frac{4!}{4!} = 1 \quad a^4, b^4$$

$$\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} = \frac{4}{1} = 4 \quad a^3b, ab^3$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 6 \quad a^2b^2$$