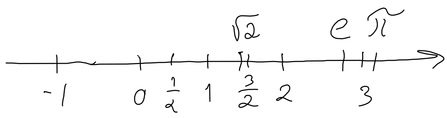
MAT 1100 29.08.2024

KAPITTEL 2 REELLE TALL



$\sqrt{2} \approx 1,41421356\ldots$

$\pi \approx 3,14159265\ldots$

BRUK EKSAKTE TALL

2.4. EN BESKRIVELSE AV $\mathbb{R}$

11 aksiomer $x, y, z \in \mathbb{R}$

(1) Kommutative lover $x+y = y+x$, $xy = yx$

(2) Assosiative lover $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = x(yz)$

(3) Distributiv lov $x(y+z) = xy + xz$

(4) Null og enhetselement $0, 1 \in \mathbb{R}$ $x+0 = x$, $x \cdot 1 = x$

(5) Motsatte tall For enhver $x \in \mathbb{R}$ finns $y \in \mathbb{R}$ slik at $x+y=0$. Skriver $y = -x$

(6) Inverse tall For enhver $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, finns $z \in \mathbb{R}$ slik at $xz = 1$. Skriver $z = x^{-1}$

---

(7) Transitivitet Hvis $x<y$ og $y<z$, så er $x<z$.

(8) Totalitet Én av tre holder: $x<y$, $x=y$, $x>y$

(9) Ulikheter 1 Hvis $x<y$, så er $x+z<y+z$

(10) — " — 2 Hvis $x<y$ og $z>0$, så er $xz<yz$

---

(11) KOMPLETTHETSPRINSIPPET

Enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$.

EKS: (OPPG 2.4.4)

Definerer $2 = 1+1$.

Skal vise at $a+a = 2a$.

Bruker aksiomene

$$a+a \overset{(4)}{=} a\cdot 1 + a\cdot 1 \overset{(8)}{=} a(1+1) \overset{\text{def}}{=} a\cdot 2 \overset{(1)}{=} 2a.$$

2.1. MENGDER, INTERVALLER OG TALLVERDI

MENGDER

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Generelt A og B

Innholdt i

$B \subseteq A$ betyr at alle elementer i B er også i A.

$B = \{x \in A \mid x \text{ har egenskapen } P\}$

slik at

s.a.

INTERVALLER

LUKKEDE

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

ÅPNE

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

HALVÅPNE

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

TALLVERDITEGN

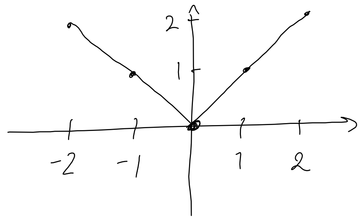
Et tall $a \in \mathbb{R}$ har tallverdi (avstand til 0)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

GRAF

f har graf $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f\}$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$



EGENSKAPER

- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- **TREKANTULIKHETEN**
  For alle $a, b \in \mathbb{R}$ gjelder
  $|a+b| \leq |a| + |b|$.

  BEVIS
  - $a \leq |a|$ og $b \leq |b|$ gir $(a+b) \leq |a|+|b|$
  - $-a \leq |a|$ og $-b \leq |b|$ gir $-(a+b) \leq |a|+|b|$
  - Totalt $|a+b| \leq |a|+|b|$. ∎
- **OMVENDT TREKANTULIKHET**
  For alle $a, b \in \mathbb{R}$ er
  $||a| - |b|| \leq |a-b|$

2.2. RASJONALE OG IRRASJONALE TALL

RASJONALE: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

IRRASJONALE: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

SETNING 2.0.1.

For $x, y \in \mathbb{Q}$, så er $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ $\in \mathbb{Q}$.

og $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

$\mathbb{Q}$ er lukket under de fire regneartene.

BEVIS $x = \frac{a}{b}$ $y = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}, \quad bd \neq 0$$

$ab - cd \in \mathbb{Z}$

$bd \in \mathbb{Z}$

$x - y$ er rasjonalt!

OBS
- KOROLLAR 2.2.2.
  Hvis $x \in \mathbb{Q}$ og $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (eller omvendt)
  så er $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ og $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Hvis $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, så kan alt skje!
  - $x = e$, $y = 1 - e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
    $x + y = e + 1 - e = 1 \in \mathbb{Q}$
  - $x = e$, $y = e$
    $x + y = 2e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

TEOREM 2.2.4.
$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall

BEVIS
- Anta for motsigelse at $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$
  - Kan anta at a, b ikke har felles faktor
- Kvadrerer $2 = \frac{a^2}{b^2}$

$$2b^2 = a^2 \quad (= 2n)$$

a^2 er et partall

LEMMA 2.2.3.
Dersom $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall
så er a^2 også et oddetall.

BEVIS $a = 2n - 1$, og

$$a^2 = (2n-1)^2$$
$$= 4n^2 - 4n + 1$$
$$= 2(\underbrace{2n^2 - 2n}_{m}) + 1$$

- Bruker lemma 2.2.3.
  a^2 partall gir at a er partall.

$$a = 2n$$

- $$2b^2 = a^2 = (2n)^2 = 4n^2 \quad | : 2$$

$$b^2 = 2n^2$$

- Bruker lemma 2.2.3 og får at b er partall.
- Som gir motsigelsen til at a og b ikke hadde felles faktor!

SETNING 2.2.6. ARKIMEDES PRINSIPP

(i) For alle $a \in \mathbb{R}$ finns $n \in \mathbb{N}$ s.a. $n > a$.

- $n = \lfloor a \rfloor + 2$

fjerne desimalene

(ii) For alle $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, finns $m \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{m} < b$.

SETNING 2.2.7. $a < b$

Ethvert åpent intervall (a, b) inneholder både (1) rasjonale og (2) irrasjonale tall.

BEVIS:

(1) Finner et rasjonalt tall i (a,b)

- Velg $m \in \mathbb{N}$ s.a. $\frac{1}{m} < b - a$ (AP)
- La $k \in \mathbb{N}$ være det minste tallet slik at $\frac{k}{m} > a$
- $\frac{k-1}{m} \leq a$
- $\frac{k}{m} = \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m} < \underbrace{a + b - a}_{= b}$
- $a < \frac{k}{m} < b$ og $\frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$

(2) Finner et irrasjonalt tall i (a,b)

- La $\frac{k}{m} = c \in (a,b)$

$a < c < b$

- Se på tallet $\frac{b-c}{\sqrt{2}}$ ← opphøstruert
- AP gir at det finns $p \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{p} < \frac{b-c}{\sqrt{2}}$
- Skriver om $c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$

$\vee$

c

$\vee$

a

- Tallet $c + \frac{\sqrt{2}}{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\uparrow$ $\mathbb{Q}$ $\quad$ $\uparrow$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

og $a < c < b$.

2.3. KOMPLETTHET AV $\mathbb{R}$

DEFINISJONER

- En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles NEDAD / OPPAD BEGRENSET hvis det finns et tall b (C) som er MINDRE / STØRRE ELLER LIK alle elementer i A.
- Tallet b (C) kalles ØVRE SKRANKE / NEDRE for A.
- Dersom b (C) er STØRRE / MINDRE enn alle andre NEDRE / ØVRE SKRANKER, kalles b (C) den STØRSTE / NEDRE / MINSTE / ØVRE SKRANKEN til A. $\inf A$ / $\sup A$

EKS:

- $A = (0, 1)$
  2 er en øvre skranke for A
  1 er den minste øvre skranken til A.
  $1 \notin A$, $1 \in \mathbb{R}$
- $A = [0, 1]$
  1 er den minste øvre skranken til A
  $1 \in A$, $1 \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{N}$ er ikke oppad begrenset
  men nedad begrenset
- 1 er største nedre skranke til $\mathbb{N}$.

2.3.2. KOMPLETTHETSPRINSIPPET

Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$.
(sup A eksisterer og sup $A \in \mathbb{R}$).

ARGUMENT

- La A være ikke-tom og oppad begrenset $\subseteq \mathbb{R}$.
- Da har A en øvre skranke
  (Vet ikke helt om den er minst ende-)
- For eksempel $126,3$ er øvre skranke
- Se på alle tall i A
  Stryk alle desimaler -78
- Se på alle tall i A som begynner på 78
  og se på første desimal, og velge største

  ⋮

- Fortsetter i slik fjerne i $\sup A$.