MAT 1100 05.09.2024

5.1. KONTINUITET

Hvis $\{x_n\} \to a$,
hva skjer med $\{f(x_n)\}$?

SETNING 5.1.10

(a) Anta at ① f er kontinuerlig i a
og at $\{x_n\}$ ② er en følge av punkter
fra D_f som konvergere mot a.
Da konvergere følgen $\{f(x_n)\}$ mot $f(a)$.

BEVIS Skal vise $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

ØNSKER DEF 4.3.1. Gitt $\varepsilon > 0$, ønsker vi å finne en $N \in \mathbb{N}$
s.a. $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

① DEF 5.1.1. f er kontinuerlig i a:
Gitt $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ s.a.
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ for alle $x \in D_f$
med $|x - a| < \delta$.

② DEF 4.3.1. $\{x_n\} \to a$
Gitt $\gamma > 0$ finnes $M \in \mathbb{N}$ slik
at $|x_n - a| < \gamma$ når $n \geq M$.

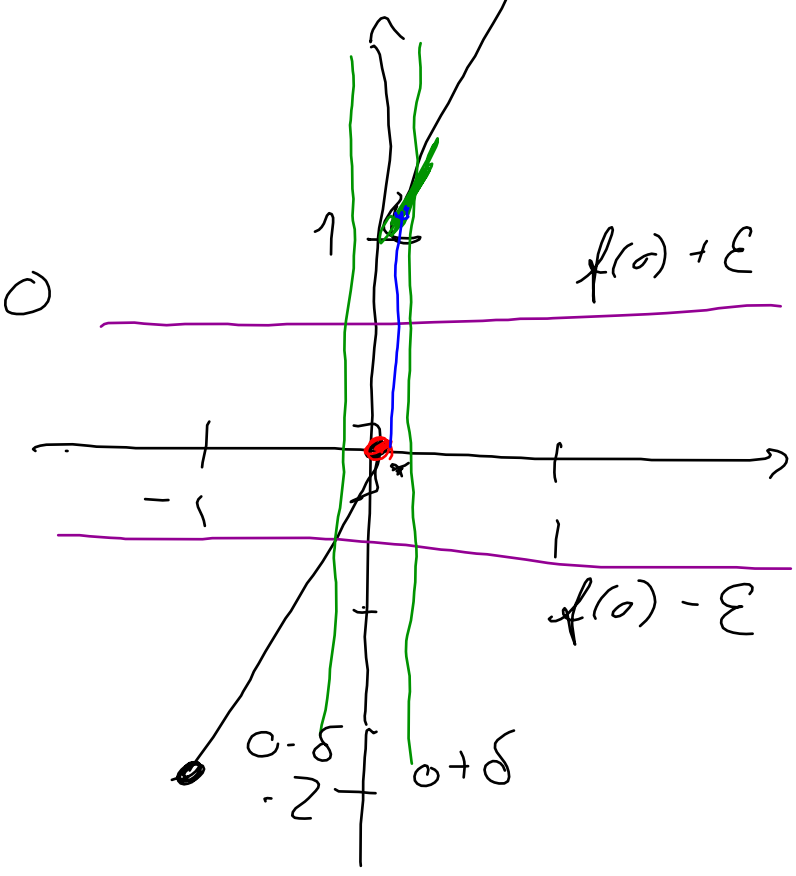
TOTALT Velg $\delta = \gamma$ og $N = M$
Gitt $\varepsilon > 0$, da er $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$
(① for alle $x_n \in D_f$ med $|x_n - a| < \delta$,
② og siden $\{x_n\} \to a$, er $|x_n - a| < \gamma = \delta$)
for alle $n \geq M = N$,
og vi har fått $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

OBS 5.1.8 DISKONTINUERLIG

En funksjon f er diskontinuerlig i et punkt a dersom det finns en $\varepsilon > 0$ s.a. uansett hvor liten $\delta > 0$ vi velger, så kan vi finne $x \in D_f$ s.a. $|x-a| < \delta$ og $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

EKS 5.1.9.

La $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$



- Skal vise at f IKKE er kontinuerlig i $a = 0$.
- Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$
- $|f(x) - f(0)| > \frac{1}{2}$ uansett hvor liten $\delta > 0$ vi velger med $|x-0| < \delta$, $\overset{''}{0}$

si f er diskontinuerlig i $a = c$.

SETNING 5.1.10 b)

Anta f diskontinuerlig i punktet a.
Da finns en følge $\{x_n\}$ av punkter i D_f
slik at $\{x_n\} \to a$, men
$\{f(x_n)\}$ konvergerer IKKE mot $f(a)$.

5.1.10 a) og b)

f er kontinuerlig i a $\iff$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$
for <u>alle</u> følger
$\{x_n\} \in D_f$ med
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

5.2. SKJÆRINGSSETNINGEN

SETNING 5.2.1 (SKJÆRINGSSETNINGEN).

Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er
① en kontinuerlig funksjon
og at ② $f(a)$ og ③ $f(b)$ har motsatte fortegn.
Da finns en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.

EKS 5.2.1 c)

Skal vise at $f(x) = 2x - 3 - \ln x$ har nullpunkt på $[1, e]$.

① f er kontinuerlig på $[1,e]$ fordi alle ledd er kontinuerlige funksjoner.

② $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 - \underbrace{\ln 1}_{=0} = -1 < 0$

③ $f(e) = \underbrace{2 \cdot e}_{\geq 4} - 3 - \underbrace{\ln e}_{=1} > 0$

Ved skjæringssetningen finns $c \in (1,e)$ slik at $f(c) = 0$.

KOROLLAR 5.2.2.

Anta $g: [a,b] \to \mathbb{R}$
og $h: [a,b] \to \mathbb{R}$
er kontinuerlige funksjoner slik at
$g(a) < h(a)$
og $g(b) > h(b)$
Da er $c \in (a,b)$ s.a. $g(c) = h(c)$

SKISSE: $f = g - h$ er alt vi trenger!

EKS 5.2.5 Kompletthet av $\mathbb{R}$ er viktig!

$f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $[0,2] \subseteq \mathbb{Q}$

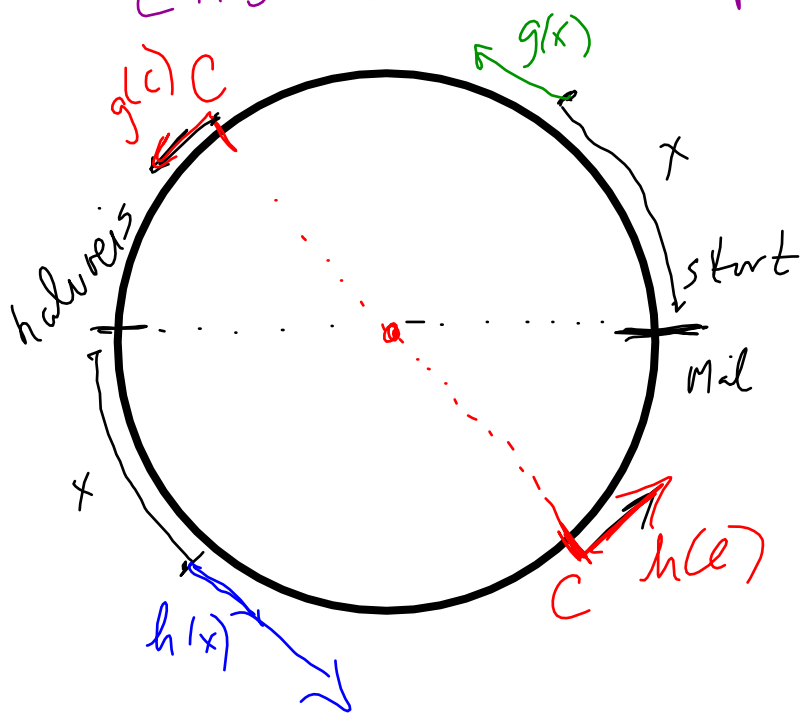
$f(x) = x^2 - 2$

$f(0) = -2 < 0$

$f(2) = 2 > 0$

Men! Jeg kan ikke finne $c \in (0,2) \subseteq \mathbb{Q}$ slik at $f(c) = 0$.

EKS 5.2.4. Løping rundt sirkelbane



Påstand:
Det finnes alltid to punkter som står rett overfor hverandre der farten er like stor.

- La $g(x)$ være farten x meter fra start
- La $h(x)$ ——————— halvveis
- La avstanden fra start til halvveis være a.
- Funksjonene g og h er kontinuerlige på $[0, a]$
- OBS: start $g(0) = 0$ $\quad g(a) \geq 0$
  stopp $h(a) = 0$ $\quad h(0) \geq 0$

$$\begin{cases} g(0) \leq h(0) \\ g(a) \geq h(a) \end{cases}$$

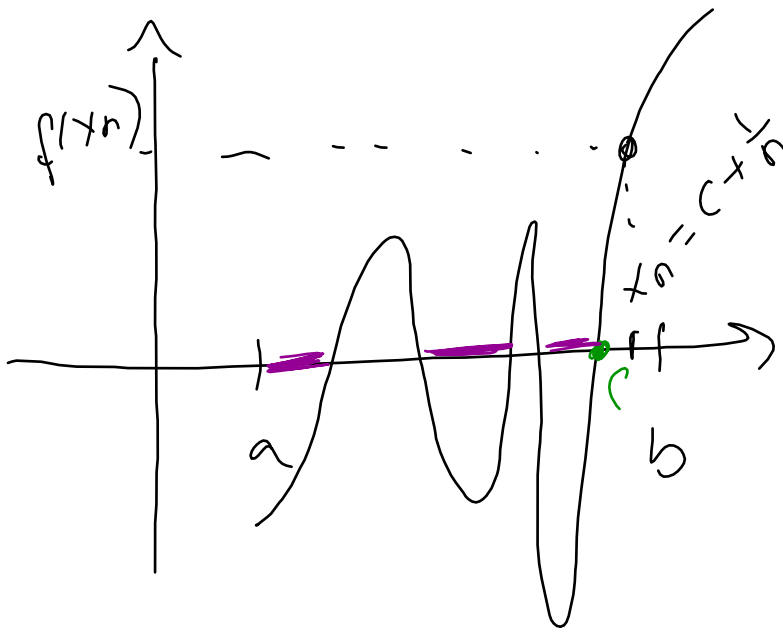
- Hvis $=$ så er 0 og a motsatt, så OK!
- Ellers - bruke korollar 5.2.2.
  Da finnes $c \in (0, a)$ s.a. $g(c) = h(c)$
  og de to punktene på sirkelen som hører til c er motstående og vi har samme fart der.

BEVIS. Kan anta f kontinuerlig

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(a) < 0$

$f(b) > 0$



• Jakter på C - største nullpunkt.

- Se på $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$
- Da er $c = \sup A$
- A er ikketom mengde oppad begrenset av b
  Da finns $c = \sup A \in \mathbb{R}$. ved kompletthetsprinsippet
- Gjenstår å vise $f(c) = 0$
- Viser $f(c) \geqslant 0$:
  - Lager $\{x_n\}$ ved $x_n = c + \frac{1}{n} < b$
  - f kontinuerlig og $\{x_n\} \longrightarrow c$,
    så ved 5.1.10 a) må $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(c)$
  - Siden $c = \sup A$ og $x_n > c$,
    må $f(x_n) \geqslant 0$ for alle n,
    og derfor må $f(c) \geqslant 0$.
- Kan vise tilsvarende for $f(c) \leq 0$.

$\{z_n\}$

$c - \frac{1}{n} \leq z_n \leq c$

der $z_n \in A$ og $f(z_n) \leq 0$, så som overnå.
$f(c) \leq 0$.

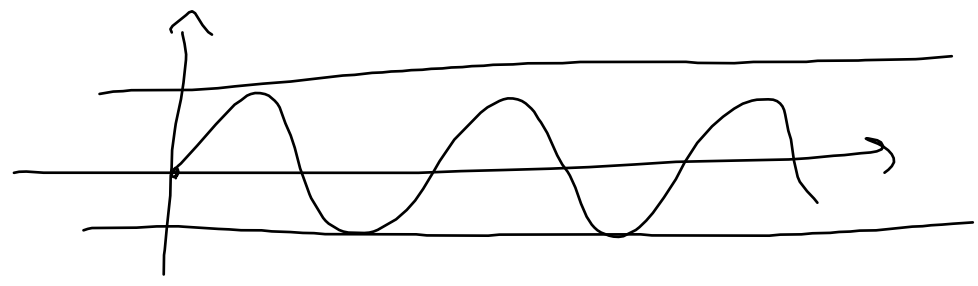
- Totalt $f(c) = 0$.

5.3. EKSTREMALVERDISETNINGEN

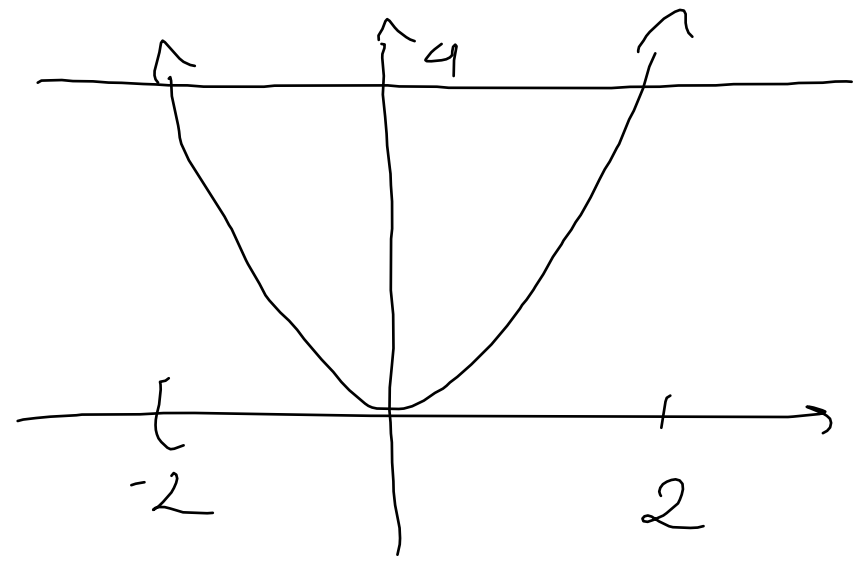
DEF 5.3.1.

En funksjon $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ er BEGRENSET dersom det finnes en $M \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in A$.

EKS
- $|\sin x| \leq 1$



- $f(x) = x^2$ på $[-2,2]$ er $|f(x)| \leq 4$



SETNING 5.3.2.

En kontinuerlig funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ som er definert på et lukket, begrenset intervall er alltid begrenset.

DEF 5.3.3. Et punkt $a \in D_f$ er

- et MAKSIMUMSPUNKT for $f: D_f \to \mathbb{R}$ dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- et MINIMUMSPUNKT for $f: D_f \to \mathbb{R}$ dersom $f(a) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- EKSTREMALPUNKTER

SETNING 5.3.5 - EKSTREMALVERDISETNINGEN

En kontinuerlig funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ definert på et lukket, begrenset intervall har både maksimum- og minimumspunkter.

EKS 5.3.6.

Skal vise at $f(x) = \dfrac{x^7 \sin\left(e^{\frac{x}{x^2+1}}\right)^{\frac{1}{4}}}{x^4+1}$

har maksimums- og minpkt på $[-1,2]$

- $[-1,2]$ er lukket og begrenset
- f er kontinuerlig som sammensetning av kontinuerlige funksjoner
- Så ved setning 5.3.5 har f maks- og minpkt på $[-1,2]$.