MAT 1100 12.09.2024

6.3. L'HÔPITALS REGEL OG UBESTEMTE UTTRYKK

PROBLEM Ikke alle grenser kan regnes direkte

LØSNING For enkelte situasjoner her vi definisjoner:

L'HÔPITAL "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$" "$0 \cdot \infty$" "$\infty - \infty$"

OMSKRIVE

EKSPONENT "1^∞" "0^0" "∞^0"

L'HÔPITAL

Kan noen ganger se på $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istedenfor $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

SETNING 6.3.2 (L'HÔPITALS REGEL FOR "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$") 6.3.7

- Anta at $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$.

  (Og anta at $g(x) \neq 0$ for alle x nær a.)

- Anta $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer (eller $\pm \infty$).

- Da eksisterer grensen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

EKS OPPG 6.3.1 b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

OBS:

- Viktig å sjekke "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"
- Vi deriverer teller og nevner hver for seg
- Holder også for $x \to a^+$ og $x \to a^-$
- Holder også for $a = \infty$ og $a = -\infty$.
- Dersom $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ IKKE eksisterer,

  kan vi IKKE si noe om $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

EKS 6.3.2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{0}{=}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\cos(x-1) \cdot 1}$$

BEVIS FOR L'HÔPITAL ("$\frac{0}{0}$") ("$\frac{\infty}{\infty}$" er $\star$-stuff)

- Antar $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.
- Vi kan anta at $f(a) = g(a) = 0$.
- Da er $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{-0}{=} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$

SETNING 6.3.1 (CAUCHYS MVT)

Anta at $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner deriverbare i alle indre punkter $x \in (a,b)$.

Da fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

BEVIS Rolles teorem på funksjonen $h(x)$

$$h(x) = [g(b)-g(a)]f(x) - [f(b)-f(a)]g(x)$$

$$h(a) = [g(b)-g(a)]f(a) - [f(b)-f(a)]g(a)$$

$$= g(b)f(a) - f(b)g(a)$$

$$h(b) = \text{---}\ \text{"}\ \text{---}$$

Så $h(a) = h(b)$ og ved Rolles teorem fins $c \in (a,b)$ slik at $h'(c) = 0$.

$$h'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x) - [f(b)-f(a)]g'(x)$$

$$0 = h'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c) - [f(b)-f(a)]g'(c).$$

og dermed $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ▨

- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$

Ved CMVT fins en $c \in (x,a)$ s.a.

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- Når $x \to a$ må $c \to a$, så $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ▨

EKS 6.3.4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin x)}{2x}$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

EKS 6.3.8.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}$$

$$\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Ikke alltid L'Hôpital fører fram:

EKS 6.3.6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{|\ \leq 1} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x\cdot \sin\frac{1}{x}}^{0} + x^2 \cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}$$

↓ svinger mellom -1 og 1.

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

"$0 \cdot \infty$" kan skrives om til "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"

EKS 6.3.9.

$$\lim_{x \to 0^+} \underset{\searrow}{x} \underset{\searrow}{\ln x}$$
$$0 \qquad -\infty$$

omskriver

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \overset{L'H}{} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x)$$

$$= 0$$

Metodt går ikke her:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \qquad \frac{1}{\ln x} = (\ln x)^{-1}$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{=}{\overset{L'H}{}}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -x(\ln x)^2$$, så dette var dumt...

"$\infty - \infty$" Få det over på "$0 \cdot \infty$" og så videre ...

EKS 6.3.10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= 1$$

EKS 6.3.13.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \,(1-\cos x)}{x\,(1+x-e^x)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{(1+x-e^x)}\right)$$

OPP6 5.4.9

$$= \underline{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{(1+x-e^x)}$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-e^x}$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{-e^x} = \underline{\underline{-1}}$$

EKS 6.3.14

La $x > 0$ og $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1 \\ 1 & \text{hvis } x = 1 \end{cases}$

Vi skal finne $f'(1)$.

Bruker definisjonen

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$$

"0" / 0 $= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1) \cdot 1}$

L'H

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{2x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

EKSPONENTIALFORMER "1^∞" "0^0" "∞^0"

TRIKS: Få alt med x i eksponenten og ta grensen der.

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

HUSK

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$$

EKS 6.3.11

"1^∞"

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \quad (\infty\cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left("\frac{0}{0}" = \text{L'H}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= e^2$$

HVA VOKSER RASKEST FOR STORE TALL?

Logaritmer < Potenser < Eksponentialer

SETNING 6.3.15

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0$ for alle $a, b > 0$

BEVIS

- Skriver om til

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a$$

- Se på

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{b/a}}\right)$$

$$\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{b}{a}x^{(\frac{b}{a}-1)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a}{b\,x^{\frac{b}{a}}}$$

$$= 0.$$

$$0^a = 0. \quad \blacksquare$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$ for alle $a, b > 0$.