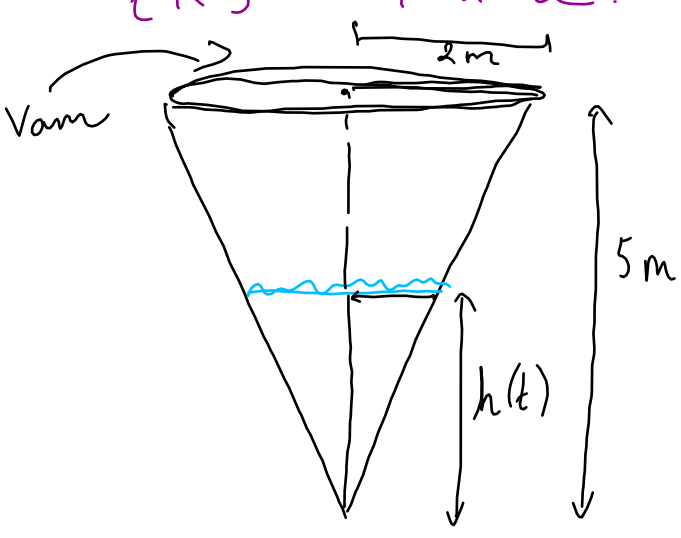
MAT 1100 19.09.2024

7.2 KOBLEDE HASTIGHETER

EKS 7.2.2.



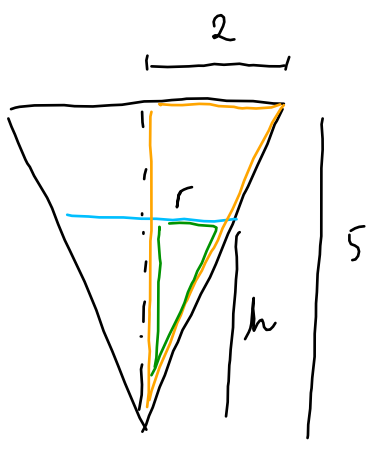
- En kjegleformet tank står med spissen ned.
- Vann pumpes inn i tanken.
- Høyden til tanken er 5m
- Høyden til vannet ved tid t er $h(t)$
- Radien til tanken på toppen er 2m
- Radien til vannspeilet ved tid t er $r(t)$
- Vannvolumet er $V(t) = \frac{\pi}{3} r(t)^2 h(t)$
- Tanken fylles med $0.1\ m^3$ vann per minutt

$$V'(t) = 0.1$$

OPPGAVE • Hvor fort øker vannstanden i det øyeblikket vannet står 3 m høyt.

Oversatt: $h'(t_0)$ der $h(t_0) = 3$

LØSNING: • Har $V(t) = \frac{\pi}{3} r(t)^2 h(t)$



Ved formlikhet er $\frac{r}{h} = \frac{2}{5}$

$$r(t) = \frac{2}{5} h(t)$$

• Får $V(t) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2}{5} h(t)\right)^2 h(t)$

$$V(t) = \frac{4\pi}{3 \cdot 25} \cdot h(t)^3$$

• Deriverer mht t:

$$V'(t) = \frac{4\pi}{3 \cdot 25} \cdot 3\, h(t)^2 \cdot h'(t)$$

• Skriver om til

$$h'(t) = \frac{25\, V'(t)}{4\pi\, h(t)^2}$$

•

$$h'(t_0) = \frac{25\, V'(t_0)}{4\pi\, h(t_0)^2}$$

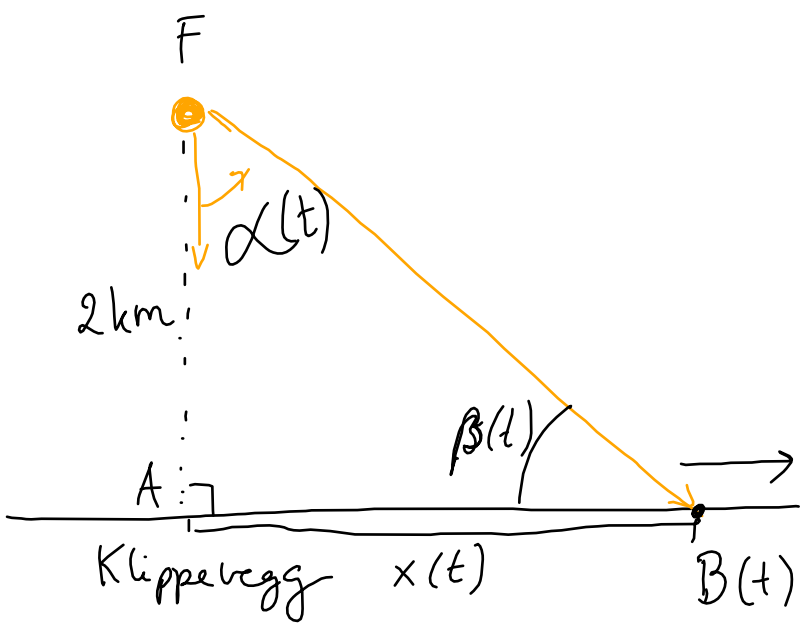
$$= \frac{25 \cdot 0.1}{4\pi \cdot 3^2}$$

$$\approx 0.022 \ (m/min)$$

STRATEGI

- Typisk at vi skal finne en fart (derivert av en lengde eller likning) for et gitt tidspunkt
- Kjenner gjerne en annen fart (for samme tidspunkt) som også er en derivert av en lengde eller likningene.
- Finnes en (geometrisk) relasjon mellom lengdene.
- Den deriverer vi!
- Sett inn det som er kjent for å finne ønsket størrelse.

Eks 7.2.3.



- Fyrtårn F
- Roterende lysstråle som bruker 2 sekunder per omdreining
- Avstanden til klippevegg (A) er 2 km
- OPPGAVE:
  Hvor fort beveger lysstrålen seg langs klippeveggen når vinkelen mellom klippeveggen og strålen er $\frac{\pi}{6} = \beta(t_0)$

- Vi har $\alpha'(t) = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Avstanden fra A til B kaller vi $x(t)$
- Vi vil ha $x'(t_0)$!
- GEOMETRI:
  - $\tan\alpha(t) = \frac{x(t)}{2}$
  - $\alpha(t) = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta(t)$
- Deriver:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) = \frac{x'(t)}{2}$$

$$x'(t) = \frac{2\alpha'(t)}{\cos^2\alpha(t)}$$

$$x'(t_0) = \frac{2 \cdot \pi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 8\pi$$

$$\approx 25.1 \text{ (km/sek)}$$

$\beta(t_0) = \frac{\pi}{6}$

$\alpha(t_0) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{3}$

7.4 OMVENDTE FUNKSJONER

EKS. • Ser på $f(x) = 2x + 1$
Kan jeg uttrykke x som en funksjon av $f(x)$?

• La $y = 2x + 1$

$y - 1 = 2x$

$\frac{y-1}{2} = x = g(y)$

$g(y) = \frac{y-1}{2}$ er den omvendte (inverse) funksjonen til $f(x)$

OBS • Noen ganger kan vi regne oss fram til den omvendte funksjonen.

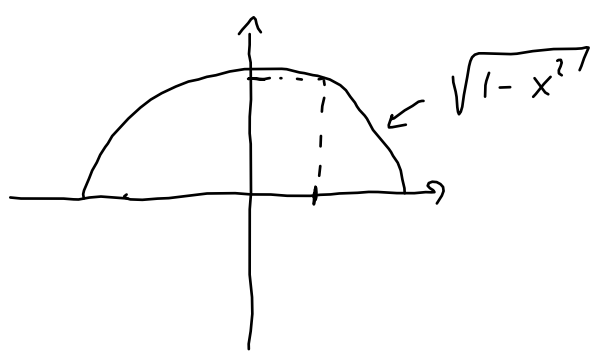
• Vi kan vanskelig finne ut hvilke funksjoner som har entydig omvendt funksjon.

• Kan noen ganger si noe* om den omvendte funksjonen uten å regne den ut.

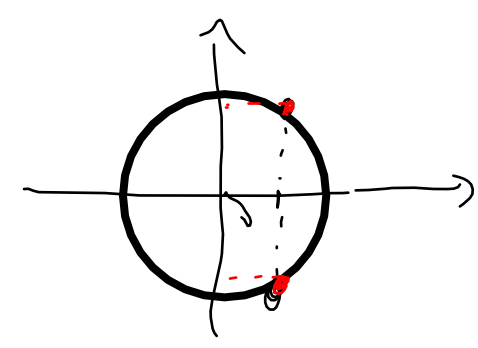
* Kontinuitet, deriverte mm.

HUSK: En funksjon $f: D_f \longrightarrow V_f$ er en regel som til ett element x i D_f gir ett (og bare ett) element $f(x)$ i V_f.

$$f: x \longmapsto f(x)$$



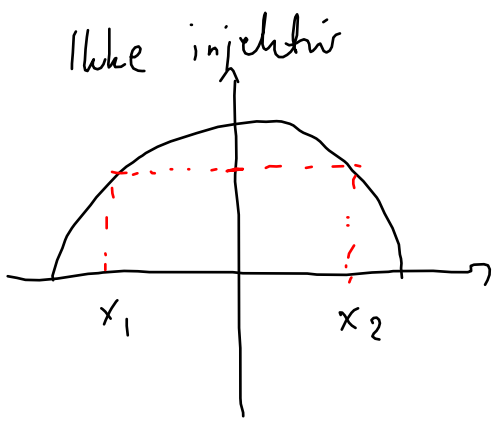
IKKE EN FUNKSJON



DEFINISJON

En funksjon kalles <u>injektiv</u> (eller en-entydig) dersom det til hver $y \in V_f$ finnes nøyaktig én $x \in D_f$ slik at $y = f(x)$.

Ikke injektiv



OBS
- Ofte gjør en omvendt <u>funksjon</u> mulig
- EKVIVALENT: Hvis $x_1 \neq x_2$ medfører $f(x_1) \neq f(x_2)$
- En <u>strengt</u> voksende (avtagende) funksjon er injektiv. (Lett å sjekke ved å derivere!)

DEF 7.4.2 (OMVENDT FUNKSJON)

Anta $f: D_f \longrightarrow V_f$ er injektiv. $x \longmapsto f(x) = y$

Vi definerer den OMVENDTE funksjonen

$$g: V_f \longrightarrow D_f$$

ved $y \longmapsto g(y) = x$

Bruker notasjonen $g = f^{-1}$.

OBS $f^{-1}(x)$ og $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ er to helt forskjellige ting!

EKS 7.4.3. (var)

La $f(x) = \ln(2x+5)$ $\quad 2x+5 > 0$

- $D_f = (-\frac{5}{2}, \infty)$
- $V_f = \mathbb{R}$
- Er f injektiv?

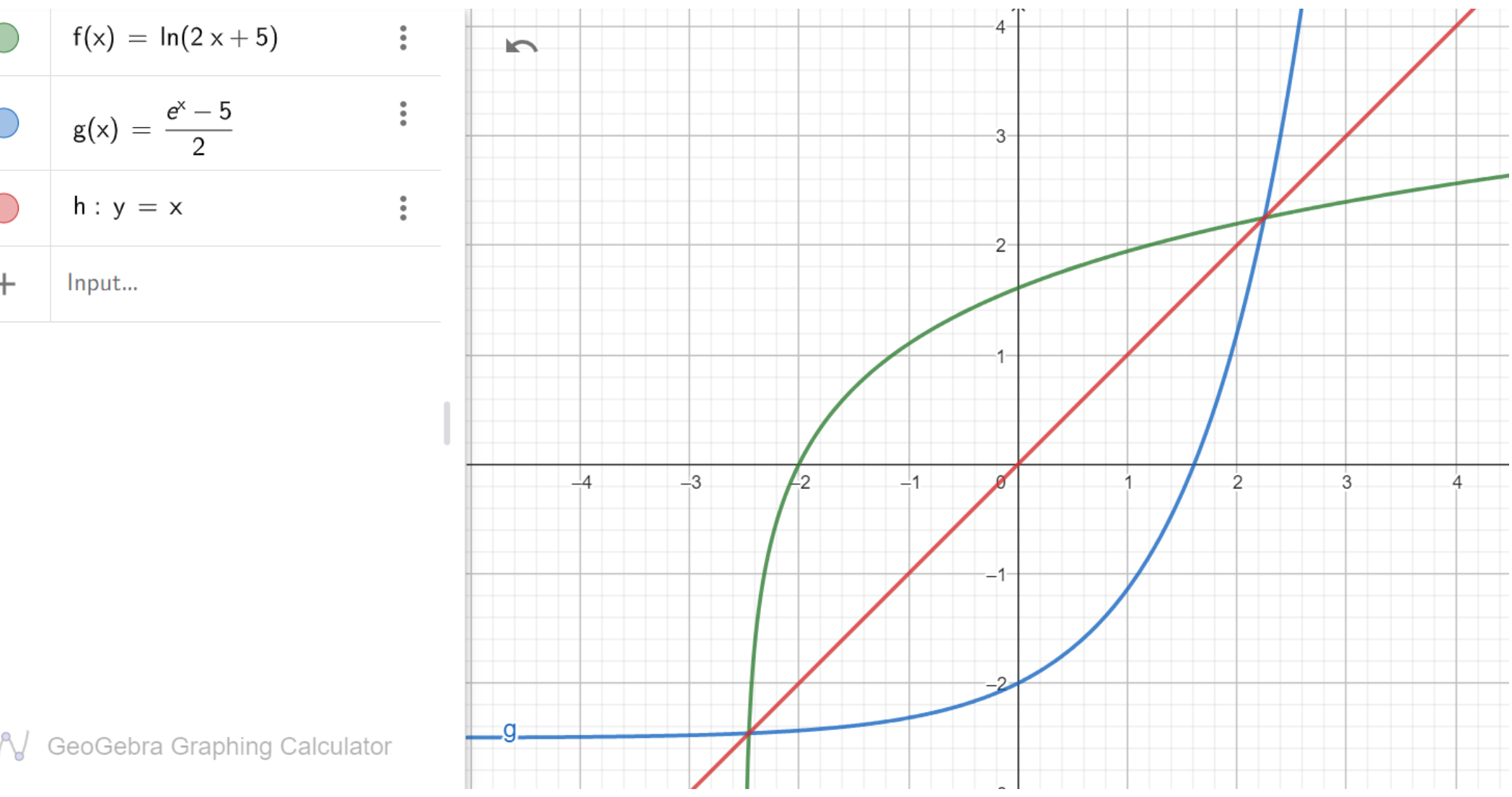
$$f'(x) = \frac{1}{2x+5} \cdot 2 > 0, \text{ (på } D_f)$$

så f strengt voksende og dermed injektiv.

- La $f(x) = y = \ln(2x+5)$

$$e^y = e^{\ln(2x+5)} = 2x+5$$

$$g(y) = x = \frac{e^y - 5}{2}$$



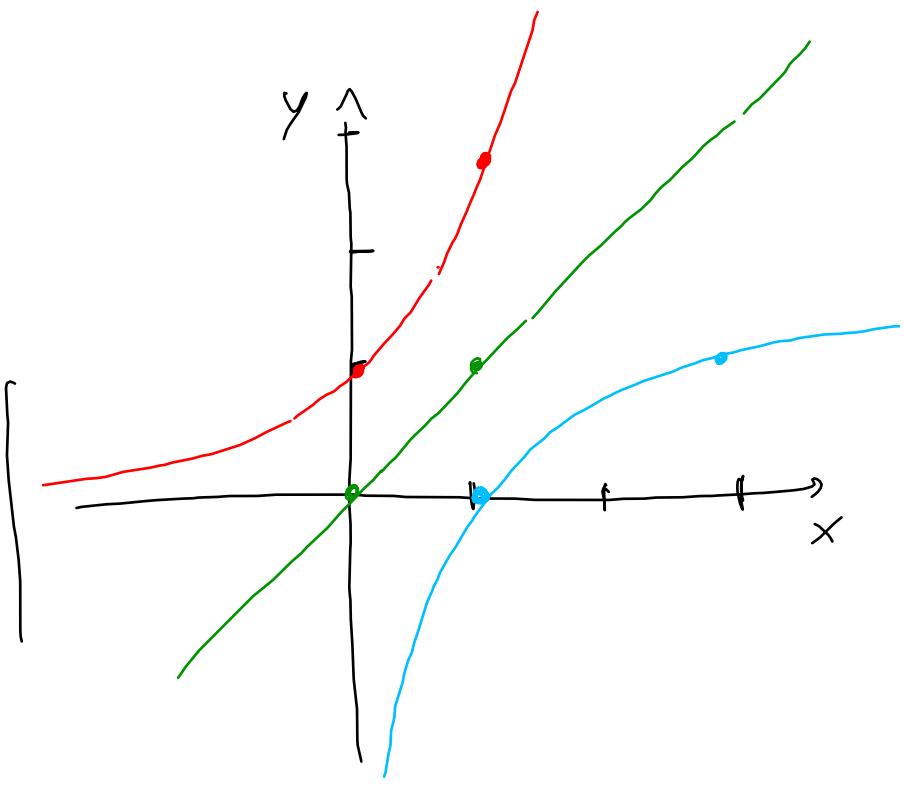
EKS 7.4.4.

$$f(x) = e^x$$

$$y = e^x$$

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$g(y) = \ln y$$



TEOREM 7.4.5

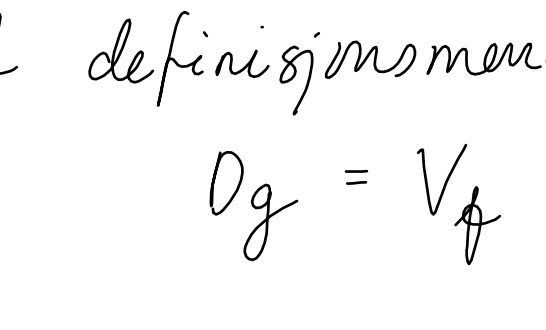
Hvis $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og strengt voksende (avtagende)

så er den omvendte funksjonen $g = f^{-1}$ kontinuerlig og strengt voksende (avtagende) med definisjonsmengde

$$D_g = V_f = [f(a), f(b)].$$

$$[f(b), f(a)]$$

OBS:
- Ofte nyttig å innskrenke definisjonsområdet til funksjoner slik at de blir injektive
- $f(x) = x^2$



på $[0, \infty)$ er $g(y) = \sqrt{y}$

på $(-\infty, 0]$ er $g(y) = -\sqrt{y}$

ikke injektiv på $(-\infty, \infty)$

TEOREM 7.4.6.

Anta at f er
- kontinuerlig
- strengt monoton
- deriverbar i x med $f'(x) \neq 0$.

Da er $g = f^{-1}$ deriverbar i $y = f(x)$

og $$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

EKS: 7.4.7.

Skal finne $g'(1)$ der g er omvendt funksjon til

$$f(x) = xe^{x^2} + 1$$

- Sjekk antakelser: • f er kontinuerlig
  - $f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + e^{x^2} \cdot 2x \cdot x + 0$
    $= e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0$ for $x \in \mathbb{R}$.

  så strengt voksende
  - Må finne x-verdi som svarer til $y = 1$

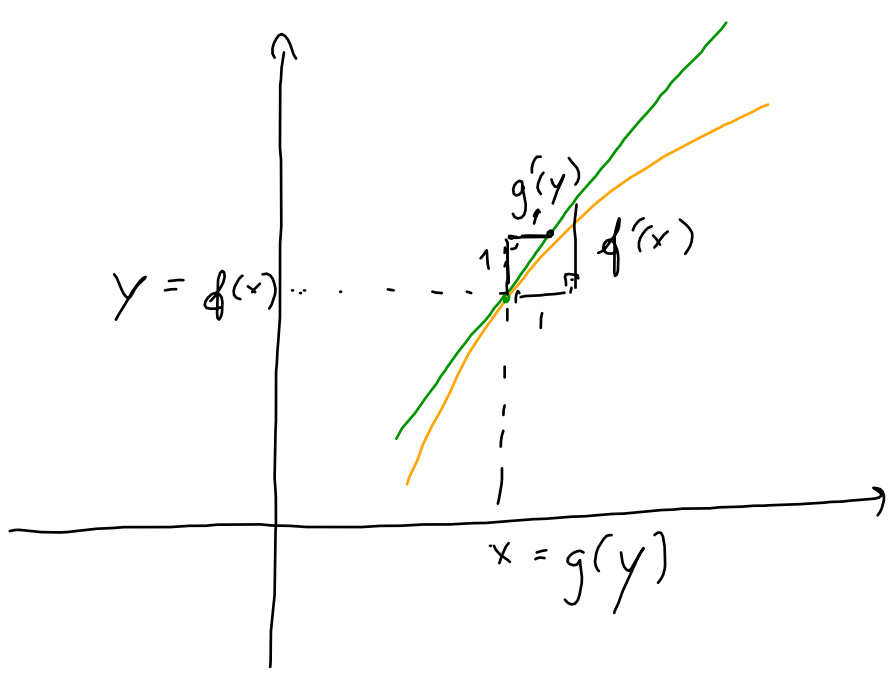
$$f(x) = 1 = xe^{x^2} + 1$$

$$x = 0$$

$$f'(0) = e^{0^2}(1 + 2 \cdot 0^2) = 1 \neq 0$$

KONKLUSJON • $$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

GENERELT



$$\frac{g'(y)}{1} = \frac{1}{f'(x)}.$$

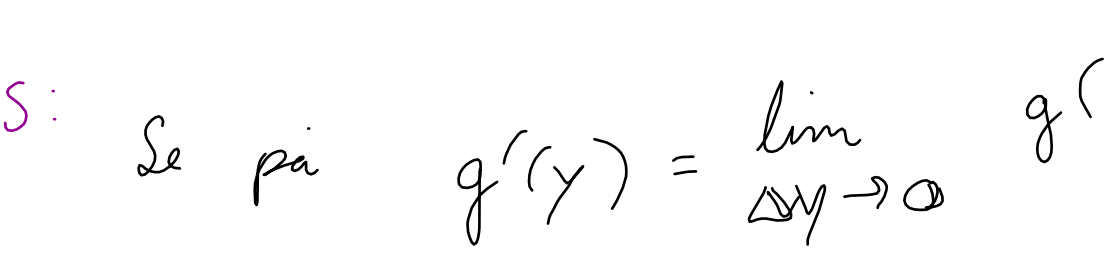
- Ser på stigningstallet til tangentlinja i punktet (x, y)
  $= g(y)$ $= f(x)$.

BEVIS:

Se på $$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

$x = g(y)$ $\quad x + \Delta x = g(y + \Delta y)$

$y = f(x)$ $\quad y + \Delta y = f(x + \Delta x)$



$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$\lim_{\Delta y \to 0}$ gir $\lim_{\Delta x \to 0}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$= \frac{1}{f'(x)}.$$