MAT 1100 26.09.2024

8.3.3. ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM

Anta $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Da er f integrerbar på $[a,x]$ der $a \leq x \leq b$

og $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert

til f på $[a,b]$.

- Teori om funksjoner ⟷ • Antiderivete
- Praktiska anvendelser

BEVIS

- INTEGRERBAR
  - Vet at f er begrenset på $[a,x]$, så vi har

ØVRE INTEGRALET $G(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt$

og NEDRE INTEGRALET $H(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,dt$

  - Vi må vise at $G(x) = H(x)$, for da (8.2.1) er f integrerbar på $[a,x]$.

LEMMA: $G'(x) = f(x) = H'(x)$

- Ved 8.3.2 er $G(x) = H(x) + C$

Vi har $G(a) = \overline{\int_a^a} f(t)\,dt = 0 \; (= H(a))$

- $G(a) = H(a) + C$

$C = 0$,

så $G(x) = H(x)$ og f er integrerbar!

(•) DERETTER:

- Da eksisterer $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$.

- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \underset{8.2.1.}{=} \overline{\int_a^x} f(t)\,dt = G(x)$

- $G'(x) = f(x) = F'(x)$, $\quad$ Lemma

så F er en antiderivert av f.

LEMMA

- Skal vise (I) $G'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$
  (II) G kontinuerlig i a og b.
- $H(x)$ er helt tilsvarende.

BEVIS (I)

- $G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{\overline{x+\Delta x}} f(t)\,dt - \int_a^{\overline{x}} f(t)\,dt \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_x^{\overline{x+\Delta x}} f(t)\,dt \right]$$

- Se på arealer, anta $\Delta x > 0$ ($\Delta x < 0$ tilsvarende)
  La $M(x,\Delta x)$ være supremum til f på $[x-\Delta x, x+\Delta x]$
  og $m(x,\Delta x)$ være infimum til f på $[x-\Delta x, x+\Delta x]$
- Siden f er kontinuerlig, må

$$\lim_{\Delta x \to 0} m(x,\Delta x) = f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} M(x,\Delta x)$$

- Med Δx positiv

Se på grafen: $m(x,\Delta x) \cdot \Delta x \le \int_x^{\overline{x+\Delta x}} f(t)\,dt \le M(x,\Delta x) \cdot \Delta x$

$| : \Delta x$ $\quad m(x,\Delta x) \le \dfrac{1}{\Delta x} \int_x^{\overline{x+\Delta x}} f(t)\,dt \le M(x,\Delta x)$

- og $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \int_x^{\overline{x+\Delta x}} f(t)\,dt = f(x)$

$\Updownarrow$

$G'(x)$. ∎

KOROLLAR 8.3.4.

Anta at $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at K er en antiderivert til f.

Da er $\int_a^b f(x)\,dx = K(b) - K(a) = \Big[K(x)\Big]_a^b$

BEVIS

- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert til f.
- $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) - F(a)$

$F(x) = K(x) + C$

$= K(b) + C - (K(a) + C)$

$= K(b) - K(a)$

EKS 8.3.5.

- Skal beregne $\int_2^3 x^4\,dx$
- $D[x^5] = 5x^4$, så $\frac{1}{5}x^5$ er en antiderivert til x^4.
- $\int_2^3 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_2^3 = \frac{1}{5}\left[x^5\right]_2^3$

$= \frac{1}{5}(3^5 - 2^5)$

$= \frac{211}{5}$

OPPG 8.3.4 c)

Skal finne $\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$

- $D[e^{x^3}] = 3x^2e^{x^3}$,

så $\frac{1}{3}e^{x^3}$ er en antiderivert til $x^2e^{x^3}$

- $\int_0^1 x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\left[e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}$

EKS 8.3.7.

Vi skal finne den deriverte til

$$G(x) = \int_0^{\cos x} e^{t^2}\,dt$$

Ser på $F(u) = \int_0^u e^{t^2}\,dt$

ved 8.3.3

$$F'(u) = e^{u^2}$$

- $G(x) = F(\cos x)$

$$G'(x) = F'(\cos x)\cdot(-\sin x) = F'(u)\cdot D[u]$$

$$= e^{\cos^2 x}(-\sin x)$$

OPPG 8.3.6. a)

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$F(u) = \int_a^u f(t)\,dt \quad \text{der} \quad F'(u) = f(u)$$

$$G(x) = F(g(x))$$

$$G'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= f(g(x))\,g'(x).$$

b)

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$$

$$G'(x) = e^{-(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2e^x\sqrt{x}}$$

OPPG

(Enklere) 8.3.5 c)

Skal finne den deriverte til

$$f(x) = \int_1^x \arctan t^2\,dt$$

$$f'(x) = \arctan(x^2)$$

8.4. DET UBESTEMTE INTEGRALET

DEF 8.4.1.

Det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

der $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$

og $C \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant.

HUSK

- $\int a\,dx = ax + C \qquad (a \in \mathbb{R})$

$$\int dx = \int 1\,dx = x + C$$

$a \neq -1$ ($a = \pi$ ~)

- $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

$\int x^{\pi}\,dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}$

$a = -1$

- $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

- $\int e^x\,dx = e^x + C$

- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

OBS: Kan alltid sjekke ved å derivere!

GJØR DET!!

DIGRESJON OPPG 8.3.1. f)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \arctan\sqrt{3} - \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4\pi - 3\pi}{12}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

SETNING 8.4.3.

Anta f, g kontinuerlige funksjoner og $a \in \mathbb{R}$.

Da gjelder

i) $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

iii)

iv) Hvis $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ og $a \neq 0$

så er $\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C$

BEVIS i) $D[aF(x)] = a\,D[F(x)] = af(x)$

$$\int af(x)\,dx = aF(x) + C$$
$$= a \int f(x)\,dx .$$

EKS 8.4.4 (var)

$$\int \frac{2}{3x} + 4\sin(5x)\,dx$$

i) og ii)

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + 4\int \sin(5x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| + 4\,\frac{(-\cos(5x))}{5} + C$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{4}{5}\cos(5x) + C$$

EKS.

$$\int \frac{\pi}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{1} + C$$

$$= \pi\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

SJEKK: $D\left[\pi\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C\right]$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} + 0$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{4-x^2}}$$ OK!

BOKS

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}x^2\right)}$$

$$= \sqrt{4}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

SETNING 8.4.5. (Enkel substitusjon, mer i kap. 9)

Hvis g er deriverbar, f er kontinuerlig og F en antiderivert av f, så er

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

BEVIS

$$D\{F[g(x)]\} = F'[g(x)] \cdot g'(x)$$
$$= f[g(x)] \cdot g'(x).$$

Antideriverer og vi er framme. ✎

EKS 8.4.6 (var) (-1)

Skal finne $\int \underline{\cos^3 x} \cdot \underline{\sin x}\,dx$

$$= -\int u^3\,du$$
$$= -\frac{1}{4}u^4 + C$$
$$= -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

SUBST.

$\underline{u = \cos x}$

$\underline{du = -\sin x\,dx}$

"$u'(x) = \frac{du}{dx}$"

EKS ①

$$\int \frac{3x}{1+x^2}\,dx$$

SUBST.

$u = 1 + x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}\,du = x\,dx$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\ln|u| + C$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

EKS ②

$$\int \frac{1+3x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{3x}{1+x^2}\,dx$$