MAT 1100 24.10.24

10.3 EKSISTENS OG ENTYDIGHET
(av førsteordens lineære differlikninger)

EKS OPPG 10.3.3.

Skal finne en funksjon $y = y(x)$ som

(I) løser $y' + y\tan x = \sin 2x$

(II) og der $y(0) = 2$ (randkrav / initialbetingelse)

(I) $y' + \tan x \cdot y = \sin 2x$

$\cdot e^{F(x)}$ $\quad \frac{1}{|\cos x|} y' + \frac{\tan x}{|\cos x|} y = \frac{\sin 2x}{|\cos x|}$

Absoluttverdien er lik på begge sider

$$\underbrace{\frac{1}{\cos x} y' + \frac{\tan x}{\cos x} y}_{} = \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\left(\frac{1}{\cos x} y\right)' = \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \int \frac{\sin 2x}{\cos x}\, dx$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x}\, dx$$

$$\frac{1}{\cos x} y = -2\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = y(x) = \cos x\,(C - 2\cos x), \quad C \in \mathbb{R}$$

Integrerende faktor

$$\phi(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\sin x\, dx \end{aligned}}$$

$$= -\int \frac{1}{u}\, du \quad + C$$

$$= -\ln|\cos x|$$

$$e^{F(x)} = e^{-\ln|\cos x|}$$

$$= e^{\ln|\cos x|^{-1}}$$

$$= |\cos x|^{-1}$$

$$= \frac{1}{|\cos x|}$$

(II) $2 = y(0) = \cos 0\,(C - 2\cos 0)$

$2 = 1 \cdot (C - 2)$

$C = 4$

$y(x) = \cos x\,(4 - 2\cos x)$

går gjennom $(0, 2)$

SETNING 10.3.1. (E&E)

- f, g kontinuerlige funksjoner på et åpent intervall I
- $c \in I$ (B) og $d \in \mathbb{R}$ (A)
- Da finns nøyaktig en løsning av

$$y' + f(x)y = g(x), \quad x \in I$$

slik at $y(c) = d$.

- Denne løsningen er

$$(*) \quad y(x) = e^{-\int_c^x f(t)\,dt} \left(\int_c^x g(t) e^{\int_c^t f(s)\,ds} dt + d \right)$$

BEVIS

(A)
- Anta for motsigelse at vi har to forskjellige løsninger y_1 og y_2 med $y_1(c) = d = y_2(c)$.

- $y_1(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C_1 \right)$
  $y_2(x) = \text{——————} \quad C_2 \Big)$ $\Big\} C_1 \neq C_2$

- Se på $y_1(x) - y_2(x) = e^{-F(x)} (C_1 - C_2)$
  $\neq 0 \qquad \neq 0$

- Se på $y_1(c) - y_2(c) \neq 0$
  $\|$
  $d - d$
  $\|$
  0 , som gir motsigelsen.

(B)
- $y(c) \overset{(*)}{=} e^{-\int_c^c f(t)\,dt} \left(\int_c^c g(t) e^{\int_c^t f(s)\,ds} + d \right)$
  $e^{-\int_c^c f(t)\,dt} = e^0 = 1$, $\int_c^c g(t) e^{\int_c^t f(s)\,ds} = 0$

$$= d$$

- Skriver $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

$$F(t) = \int_c^t f(s)\,ds$$

$$(*) \quad y(x) = e^{-F(x)} \left(\int_c^x g(t) e^{F(t)} dt + d \right)$$
$$= e^{-F(x)} \left(\int g_1(x) e^{F(x)} dx + \hat{C} \right), \quad \hat{C} + d = C$$

som er løsningsformen fra 10.1.3.

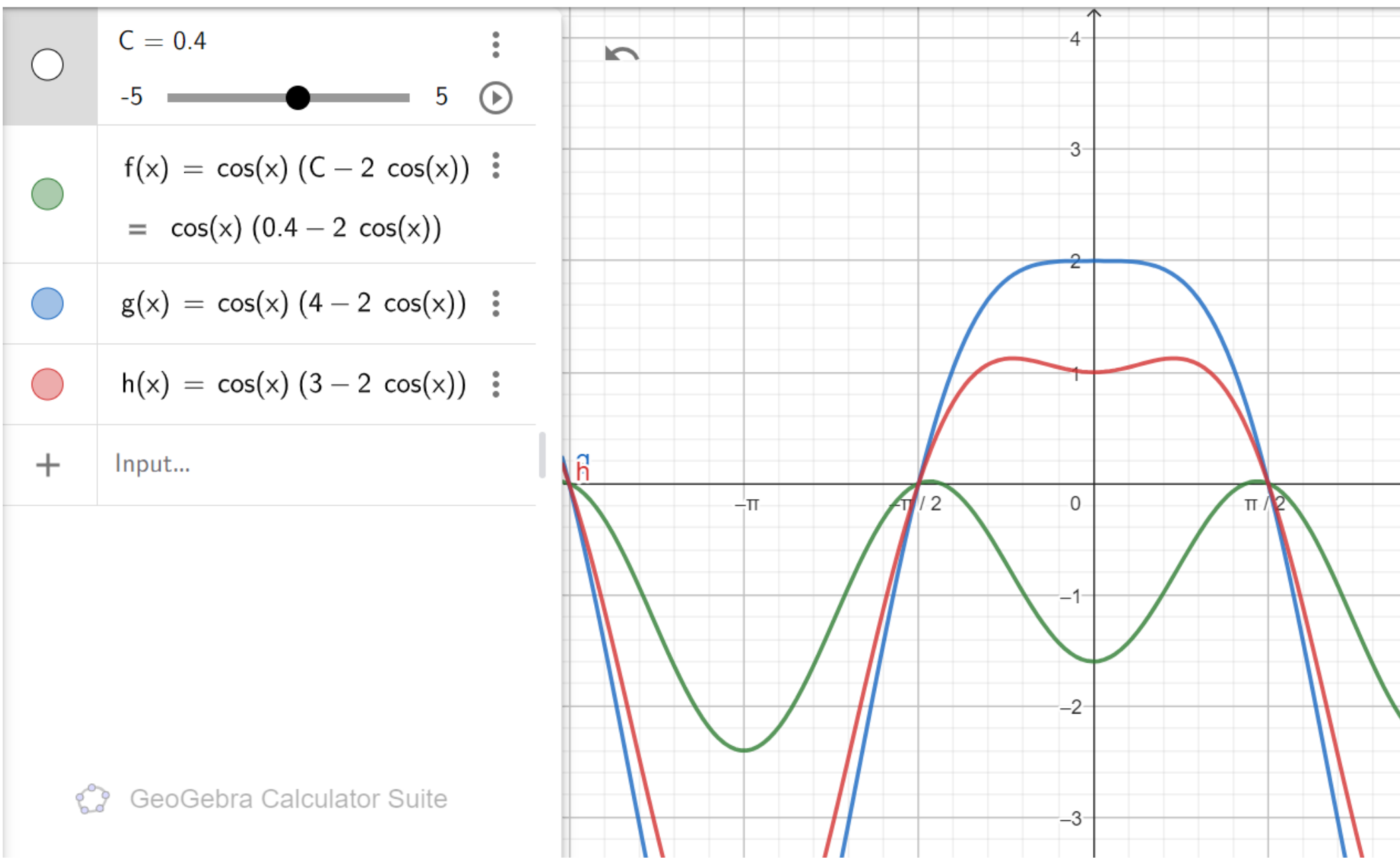
EKS 10.3.3 (PPG)

GENERELL LØSNING $\quad y(x) = \cos x\,(C - 2\cos x)\,, \; C \in \mathbb{R}$

SPESIELL LØSNING

$y(0) = 2 \;:\; y_{(0,2)}(x) = \cos x\,(4 - 2\cos x)$

$y(0) = 1 \;:\; y_{(0,1)}(x) = \cos x\,(3 - 2\cos x)$



OBS:
- For hvert punkt (c, d) med $c \in I \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ finnes nøyaktig én funksjonsgraf gjennom punktet.
- To ulike løsninger kan aldri skjære hverandre

- Pass på hvor vi har løsning:

$$x y' + y = x \sin x \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

- $x \neq 0 \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x \rightsquigarrow y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$
- $x = 0 \quad 0 \cdot y' + y = 0$

$$y(0) = 0$$

$$y(x) = \begin{cases} -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0. \end{cases}$$

10.4. SEPARABLE DIFFLIKNINGER

$$q(y) \cdot y' = p(x)$$

EKS. 10.4.1.

$$e^{-x} y' = 1 + y^2$$

- Separerer

$$\frac{y'}{1+y^2} = e^x \qquad \Big| : e^{-x} \text{ og } : (1+y^2)$$

- Steg vi vanligvis hopper over:
  - Anta $y(x)$ er en løsning:

$$\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = e^x$$

  - Antiderivere mht x på begge sider

$$\int \frac{y'(x)}{1+y(x)^2}\,dx = \int e^x\,dx$$

  - SUBST: $y = y(x)$

$$dy = y'(x)\,dx$$

- Ny likning

$$\int \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{q(y)}\,dy = \int \underbrace{e^x}_{p(x)}\,dx$$

- $\arctan y + C_1 = e^x + C_2$

$$\arctan y = e^x + C$$

- Finner y

$$y(x) = y = \tan(e^x + C)$$

EKS 10.4.2.

Skal løse $xy' = y + xy$ (*)

- Separerer $xy' = y(1+x)$

Antar $x \neq 0$ og $y \neq 0$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \quad \Big| : x \quad : y$$

- Integrerer

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + x + C$$

- Løser for y

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + x + C} = e^C \cdot e^x e^{\ln|x|}$$

$$|y| = \underline{e^C} e^x |x|$$

$$y = D x e^x \text{ for } D \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \hat{D} = e^C > 0 \\ D = \pm e^C \end{array} \right)$$

(*) $y = 0$ er også ok, så $D \in \mathbb{R}$

$$\underline{y(x) = D x e^x \text{ for } D \in \mathbb{R}}$$

GENERELL LØSNINGSMETODE

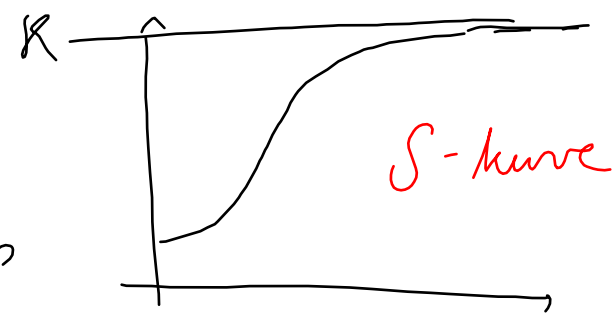
$$q(y)\,y' = p(x)$$ ← steg med substitusjon

- $\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$

$\quad\quad\quad

LOGISTISK VEKST

- Modeller for populasjonsvekst
  spredning av virus



- $y(t)$ er populasjonsstørrelsen ved tid t
- $y'(t)$ er endring i populasjonsstørrelsen
- r er vekstrate per tid
- K er bæreevnen for populasjonen

- Starter med

$$y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

$$y' = r\,y\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

- Separerer

$$\underbrace{\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)}}_{q(y)}\, y' = \underbrace{r}_{p(t)}$$

- Integrerer

$$\int \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)}\,dy = \int r\,dt = rt + C$$

DELBRØK

$$\frac{1}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-\frac{y}{K}} = \frac{A\left(1-\frac{y}{K}\right) + By}{y\left(1-\frac{y}{K}\right)}$$

$$A = 1 \qquad B = \frac{A}{K} = \frac{1}{K}$$

- $\int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{K\left(1-\frac{y}{K}\right)}\,dy$ $\qquad \frac{1}{(K-y)}$

$$= \ln|y| - \ln|K-y| \;(+C)$$

- Totalt: $\ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = rt + C$

$$e^{\ln\left|\frac{y}{K-y}\right|} = \left|\frac{y}{K-y}\right| = e^{rt+C} = De^{rt}$$

$$\frac{y}{K-y} = De^{rt} \quad \text{for } D = \pm e^{C} \neq 0$$

$$y = (K-y)De^{rt} = KDe^{rt} - yDe^{rt}$$

$$y\left(1 + De^{rt}\right) = KDe^{rt}$$

$$y = y(t) = \frac{KDe^{rt}}{1 + De^{rt}}, \quad D \neq 0$$

- Vanlig form er: (vi deler på De^{rt} i teller og nevner)

$$y(t) = \frac{K}{1 + \frac{1}{D}e^{-rt}} \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = K$$

Befolkning i Oslo (?)

- $y(0) = 750\,000 \rightsquigarrow$ bestemmer D

$K = 1000\,000$

$r = 0{,}01$