MAT 1100 29.10.2024

SETNING 10.5.8 og 10.5.9.

likning $y'' + py' + qy = 0$

med karakteristisk likning $r^2 + pr + q = 0$.

- Hvis $r^2 + pr + q = 0$ har <u>en rot</u> r_1,
  så er alle løsningene på formen

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

- Med $c, d, f \in \mathbb{R}$ finnes nøyaktig en løsning
  slik at $y(c) = d$ og $y'(c) = f$.

BEVIS: Lager hjelpefunksjon $u = \frac{y}{e^{r_1 x}}$

$$y = ue^{r_1 x}$$

$$y' = u'e^{r_1 x} + ur_1 e^{r_1 x}$$

$$y'' = u''e^{r_1 x} + u'r_1 e^{r_1 x} + u'r_1 e^{r_1 x} + ur_1^2 e^{r_1 x}$$

$$0 = y'' + py' + qy = \left[u'' + (\underbrace{2r_1 + p}_{=0})u'\right]\underbrace{e^{r_1 x}}_{\neq 0}$$

- Vet at, siden r_1 er dobbel rot i $r^2 + pr + q = 0$
  må $\underbrace{p = 2r_1}$

- Da må $u'' = 0$

$$u' = D, \quad D \in \mathbb{R}$$

$$u = Dx + C, \quad D, C \in \mathbb{R}$$

- $y = ue^{r_1 x} = (Dx + C)e^{r_1 x}$

$$= \underline{\underline{Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}}}$$

TILFELLE 3: TO KOMPLEKSE RØTTER

$$r_1 = a + ib \quad , \quad r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$$

La oss gjette:

$$y(x) = Ee^{r_1 x} + Fe^{r_2 x} \quad , \quad E, F \in \mathbb{C}$$

men dette er ofte komplekst

Vi ønsker reelle løsninger

Skriver:

- $e^{r_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$

  $e^{r_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos(-bx) + i\sin(-bx))$

  $= e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))$

- $E = A + iB$
  $F = A - iB$
  } For å få noe reelt

- $y(x) = (A+iB)e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + (A-iB)e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$

$$= 2Ae^{ax}\cos bx - 2Be^{ax}\sin bx$$

$$= e^{ax}[C\cos bx + D\sin bx] \quad , C, D \in \mathbb{R}$$

SETNING 10.5.11 & 10.5.13

- Hvis den karakteristiske likningen til $y'' + py' + qy = 0$ har to komplekse røtter $r_1 = a + ib$ og $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$, så er alle funksjoner på formen

$$y(x) = e^{ax}[C\cos bx + D\sin bx] \quad , C, D \in \mathbb{R}$$

er løsninger.

- La $c, d, f \in \mathbb{R}$. Da finnes nøyaktig én løsning slik at $y(c) = d$ og $y'(c) = f$.

EKS 10.5.12 Skal løse $y'' + 2y' + 4y = 0$

med $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$

- Se på $r^2 + 2r + 4 = 0$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \underline{-1 \pm i\sqrt{3}}$$

- Gir $\underline{y(x) = e^{-x}\left[C\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x)\right]}$, $C, D \in \mathbb{R}$

- $\underline{1} = y(0) = e^{-0}\left[C\cos 0 + D\sin 0\right]$

$$= 1 \cdot \left[C \cdot 1 + D \cdot 0\right]$$

$$\underline{1 = C}$$

- $y(x) = e^{-x}\left[\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x)\right]$

$$y'(x) = -e^{-x}\left[\cos(\sqrt{3}x) + D\sin(\sqrt{3}x)\right]$$

$$+ e^{-x}\left[-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}D\cos(\sqrt{3}x)\right]$$

$$\underline{1} = y'(0) = -e^{0}\left[\cos 0 + D\sin 0\right]$$

$$+ e^{0}\left[-\sqrt{3}\sin 0 + \sqrt{3}D\cos 0\right]$$

$$\underline{1} = -1 + \sqrt{3}D$$

$$D = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{y(x) = e^{-x}\left[\cos(\sqrt{3}x) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}x)\right]}$$

FASEFORM

$$y(x) = e^{ax}\left[C\cos bx + D\sin bx\right]$$

kan skrives på faseform

$$y(x) = A\,e^{ax}\sin(bx+\varphi),$$

der $A = \sqrt{C^2+D^2}$

φ: $\sin\varphi = \frac{C}{A}$, $\cos\varphi = \frac{D}{A}$

UTLEDNING

- e^{ax} ✓
- $A\sin(bx+\varphi) = A\left[\sin\varphi\cos bx + \cos\varphi\sin bx\right]$ (summeformel for sinus)

$$= C\cos bx + D\sin bx$$

$C = A\sin\varphi$ $\quad$ $D = A\cos\varphi$

$$C^2 + D^2 = A^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = A^2$$

OPPSUMMERING FOR (*) $y'' + py' + qy = 0$

(*) har løsninger som avhenger $r^2 + pr + q = 0$

I r_1 og r_2

$$y_h = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} \quad , C, D \in \mathbb{R}$$

II r_1

$$y_h = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x} \quad , C, D \in \mathbb{R}$$

III r_1 og $r_2 \in \mathbb{C}$ $\quad r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$

$$y_h = e^{ax}\left[C \cos bx + D \sin bx\right]$$

10.6. ANNENORENS INHOMOGENE LIKNINGER

$$(*) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

LEMMA 10.6.1.

Løsningene til (*) er på formen

$$\boxed{y = y_h + y_p},$$

der y_h oppfyller $y_h'' + py_h' + qy_h = 0$

og y_p er EN løsning av $y_p'' + py_p' + qy_p = f(x)$.

OBS:
- Initialbetingelser brukes til slutt!
- Gitt $c, d, A \in \mathbb{R}$ finn nøyaktig én løsning slik at $y(c) = d$ og $y'(c) = A$.

HVORDAN FINNER VI y_p ?

VI GJETTER! UKJENTE KOEFFISIENTERS METODE

- y_p har "samme form" som $f(x)$, men med ukjente koeffisienter som vi skal finne.

EKS 10.6.2.

Skal løse $y'' + y' - 2y = 2x$

y_p

- Har $f(x) = 2x$
- Gjetter $y_p = Ax + B$

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

- $\underbrace{y_p'' + y_p' - 2y_p}_{2x + 0} = 0 + A - 2(Ax + B)$

$$2x + 0 = -2Ax + A - 2B$$

Sammenlikner og får

$$2 = -2A \qquad 0 = A - 2B$$

$$A = -1 \qquad B = \frac{A}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_p = -x - \frac{1}{2}$$

y_h: $r^2 + r - 2 = 0$ med løsninger $r_1 = 1$ og $r_2 = -2$

(1) $y_h = Ce^x + De^{-2x}$, $C, D \in \mathbb{R}$.

TOTALT $y = y_p + y_h = -x - \frac{1}{2} + Ce^x + De^{-2x}$, $C, D \in \mathbb{R}$.

REGEL NÅR $f(x)$ ER ET POLYNOM e^{0x}

La $g(x)$ ha samme form som $f(x) = 1 \cdot p(x)$

a) Hvis (0) IKKE er en rot i den karakteristiske likningen,

la $y_p(x) = g(x)$

Spesialtilfeller:

b) Hvis (0) er en enkeltrot — : $y'' + py' = f(x)$

la $y_p(x) = x \cdot g(x)$

c) Hvis 0 er en dobbeltrot — : $y'' = f(x)$

la $y_p(x) = x^2 g(x)$

OBS! $f(x) = K$, $K \in \mathbb{R}$ er et nulltegradspolynom.

EKS 10.6.3.

Skal finne generell løsning til

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x-2)$$

y_h: $\underbrace{r^2 - 6r + 9}_{(r-3)^2} = 0$ $\quad r = 3$ er en dobbeltrot

II $\quad y_h(x) = Ce^{3x} + Dxe^{3x}$

y_p: $\quad f(x) = e^{3x}(x-2)$

$g(x) = e^{3x}(Ax + B)$

Må gå opp 2 grader!

$y_p = x^2 g(x) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2)$

$y_p' = 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx)$

$y_p'' = 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 3e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx)$

$+ 3e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2B)$

- Innsetting i $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x-2)$

V.S. $9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2B)$

$-6 \cdot 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) - 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx)$

$+ 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2)$

$= e^{3x}(6Ax + 2B)$

H.S. $= e^{3x}(x - 2)$

$6A = 1 \qquad 2B = -2$

$A = \frac{1}{6} \qquad B = -1$

$$y_p(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{6}x^3 - x^2\right)$$

TOTALT $\quad y(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + Dx + C\right)$

VI HAR FØLGENDE REGEL NÅR $f(x) = e^{ax} P(x)$

La $g(x) = e^{ax} Q(x)$ for et generelt polynom $Q(x)$ som har ukjente koeffisienter

a) Hvis a IKKE er rot i den karakteristiske likn, la $y_p(x) = e^{ax} Q(x)$.

b) Hvis a er en enkeltrot — " — la $y_p(x) = e^{ax} \cdot x \cdot Q(x)$

c) Hvis a er en dobbeltrot — " — la $y_p(x) = e^{ax} \cdot x^2 \cdot Q(x)$

EKS.

REGEL NÅR f(x) ER TRIGONOMETRISK

- Med $f(x) = a^x [E \cos bx + F \sin bx]$
  - prøv generelt
    $$y_p = a^x [A \cos bx + B \sin bx]$$
  - hvis $y_h = a^x \cos bx$ eller $y_h = a^x \sin bx$
    la $y_p = a^x \cdot x [A \cos bx + B \sin bx]$.