MAT 1100 05.11.2024

12 REKKER

12.1. KONVERGENS AV REKKER

Følger: $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Lager følger av delsummer:

$$\{a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots\}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$$

Følgen $\{s_n\}$ kalles REKKEN generert av $\{a_n\}$

Skriver $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a_n kalles leddene i rekken

DEF:
- Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ KONVERGERER mot et tall S dersom følgen $\{s_n\}$ av delsummer konvergerer mot S.
- Tallet S kalles SUMMEN av rekken og betegnes ofte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

og vi skriver

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

(Intuitivt er en rekke en uendelig sum.)

OBS:
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — En rekke ~ følge / Dens sum ~ tall — to ulike ting!
- Mulig problem: Hva betyr $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$?

  Er $a_n = b_n$ for alle n?

  Er det to rekker med samme sum?

EKS: (1) Uendelig desimaltall

$$3{,}14159\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \ldots$$

(2) Aritmetiske rekker $\quad a_{n+1} - a_n = k \in \mathbb{R}$

$\{a_n\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

$S_1 = 3$

$S_2 = 3 + 6$

$S_3 = 3 + 6 + 9$

Vellykket formel

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot i = n\,\frac{(3 + 3 \cdot n)}{2}$$

Blir ikke så interessant når $n \to \infty$

(3) Geometriske rekker - forholdet $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$.

Tallet r kalles kvotient.

Leddene i en geometrisk rekke er:

$$a_0, r \cdot a_0, r^2 a_0, r^3 a_0, \ldots, r^n a_0, \ldots$$

Rekken skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$$

- $r = 2$, $a_0 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots \longrightarrow \infty$$

- $r = \frac{1}{2}$, $a_0 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

SETNING 12.1.1.

Anta $a_0 \neq 0$.

Den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$ konvergerer

hvis $|r| < 1$ til $\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0 = \frac{a_0}{1 - r}$,

og hvis $|r| \geq 1$ så divergerer rekken.

BEVIS: Se på $S_n = a_0 + r a_0 + r^2 a_0 + \ldots + r^n a_0$

EKS 1.2.3. $= a_0 \dfrac{(1 - r^{n+1})}{1 - r}$, $r \neq 1$.

- Hvis $|r| < 1$, da er $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_0}{1 - r}$.

siden $\lim_{n \to \infty} r^{n+1} = 0$

- Hvis $|r| > 1$, så vil $|r|^{n+1} \longrightarrow \infty$

så S_n divergerer

og dermed vil $\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$ divergere.

- $r = -1$ gir $(-1)^{n+1}$ som fluktuerer
- $r = 1$ gir $S_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{r^k}_{1} a_0 = (n+1)\,a_0 \longrightarrow \infty$

EKS 12.1.3.

Skal finne summen til $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

HUSK FRA 11.2.4.

Taylorpolynom til e^x om 0

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}}_{S_n} + R_n f(1)$$

og $|R_n f(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!}$

Så $S_n = e - R_n f(1)$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$R_n f(1) \to 0$

$\lim_{n \to \infty} S_n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$e = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}$$

12.1.4. DIVERGENSTESTEN

- Hvis rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

A $\Rightarrow$ B

- Alternativt: Hvis leddene a_n IKKE går mot 0, så rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergere.

BEVIS: Vi har $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= S - S$$

$$= 0$$

∎

ADVARSEL: Motsatt holder IKKE!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergerer.}$$

En rekke som divergerer fordi leddene ikke går mot 0.

EKS:

konvergerer eller divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$?

Se på $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{\text{"}\infty\text{"}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$= \frac{1}{e}$

$\neq 0$.

Ved divergenstesten vil rekken divergere.

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$= e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$= e$

EKS 12.1.6. (Leddene $\to 0$, men rekken divergerer)

Den harmoniske rekken

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

DIVERGERER

(selv om $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$).

BEVIS Skriver $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$

$k = 2^n$ $\quad S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$n+1$ linjer:

$= 1 \longrightarrow = 1 > \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2} \longrightarrow = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \longrightarrow > \frac{1}{2^2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \quad > \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 = \frac{1}{2}$

$\vdots$

$+ \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2}$

$> (n+1) \cdot \frac{1}{2}$

Så $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$

Den harmoniske rekken divergerer!

SETNING 12.1.7.

Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$

og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ er to konvergente rekker.

Da gjelder

i) ii) $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n}_{\text{II}} = A \pm B$

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, som er konvergent

iii) $c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = cA$

II

$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n$ for ethvert tall c

KOROLLAR 12.1.8.

Dersom én av $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergerer

og den andre divergerer,

så divergerer også

$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n)$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)$.

SETNING 12.1.9. (De første leddene betyr ingenting)

La $m > 0$. De to rekkene

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$

vil enten begge konvergere eller begge divergere

12.2. REKKER MED POSITIVE LEDD

DEF: (POSITIV)

En positiv rekke er en rekke $\sum a_n$ der $a_n \geq 0$ for alle n.

DEF: (BEGRENSET)

En rekke er begrenset hvis det finns M slik at $\left|\sum_{k=0}^{n} a_n\right| < M$ for alle n.

SETNING 12.2.1.

En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

BEVIS:

hvis $\sum a_n$ er en positiv rekke,

da er $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ en voksende følge.

Ved setning 4.3.9. er $\{S_n\}$ konvergent hvis og bare hvis den er begrenset.

EKS. 12.2.2:

Skal vise at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ konvergerer.

- Positiv rekke
- $\frac{1}{(n+1)2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ for alle n
- $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)2^n} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$
- Så $M = 2$ begrenser $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)2^n}$ for alle N.

og derfor konvergerer rekken.

INTEGRALTESTEN SETNING 12.2.3.

Anta $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ er positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon

Da konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\iff$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer

VIKTIGSTE ANVENDELSE SETNING 12.2.4.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer $\iff$ $p > 1$.

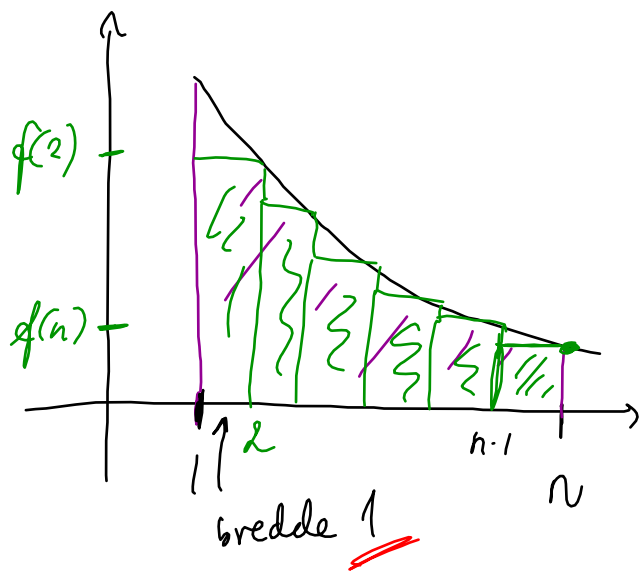
BEVIS:

- $f(x) = \frac{1}{x^p}$ positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon på $[1, \infty)$
- Fra 9.5 vil $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergere $\iff p > 1$
- Så vel integraltesten må $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergere.

BEVIS FOR INTEGRALTESTEN

$\Longleftarrow$ · Anta at $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergerer

$B \Rightarrow A$



- $\int_1^n f(x)\,dx$
- $\sum_{k=2}^{n} f(k)\cdot 1$

- Ser at $\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx < \int_1^\infty f(x)\,dx = M$

- Vi har en positiv og begrenset rekke, som konvergerer.

- Og ved 12.1.9. må også $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergere.