MAT 1100 21.11.2024

MAT 1100 - 2019

(8) $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{ax\cos x}{\sin x} + 2 & \text{hvis } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ bx + 1 & \text{hvis } \frac{\pi}{2} \le x \le 2 \end{cases}$$

(a) For hvilke a, c er f kontinuerlig i $x = 0$?

Nok å kreve

$$c = f(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ax\cos x}{\sin x} + 2$$

$$= a \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) + 2$$

$\cos x \to 1$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} \overset{\text{"0/0"}}{=} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$ ($\cos x \to 1$)

$$c = a \cdot 1 \cdot 1 + 2$$

$$\underline{\underline{c = a + 2}}$$

Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 0$ for alle valg av $a \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$ slik at

$$\underline{\underline{c = a + 2}}$$

(b) Skal finne a, b, c s.a.
- f er kontinuerlig på $[0,2]$
- deriverbar på $(0,2)$.

- f kontinuerlig i 0 hvis $c = a + 2$.
- — " — på $(0, \frac{\pi}{2})$ fordi $\frac{a \cdot x \cdot \cos x}{\sin x} + 2$ der er den satt sammen av kontinuerlige funksjoner
- $bx+1$ — $bx+1$ er kont. på $[\frac{\pi}{2}, 2]$

- For at f skal være kontinuerlig i $x = \frac{\pi}{2}$ er det nok å kreve

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{a \cdot x \cdot \cos x}{\sin x} + 2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b \cdot \frac{\pi}{2} + 1$$

($\cos x \to 0$, $\sin x \to 1$)

$$0 + 2 = b \cdot \frac{\pi}{2} + 1$$

$$1 = b \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$b = \frac{2}{\pi}$$

- $(0, \frac{\pi}{2})$ ok fordi $\frac{a \cdot x \cdot \cos x}{\sin x} + 2$ er deriverbar
- $(\frac{\pi}{2}, 2]$ ok fordi $bx+1$ — " —

Deriverbar i $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

($f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $b = \frac{2}{\pi}$)

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{a \cdot x \cdot \cos x}{\sin x} + 2 - \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 1\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{a \cdot x \cdot \cos x}{\sin x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin x}{1} = -1$
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}$

$$= a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (-1)$$

$x \in [\frac{\pi}{2}, 2]$

$$f'(x) = b = \frac{2}{\pi} \quad \text{(fra over)}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Vi må ha

$$-a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a = \frac{-4}{\pi^2}$$

Så $a = \frac{-4}{\pi^2}$, $b = \frac{2}{\pi}$ og $c = -\frac{4}{\pi^2} + 2$

(c) Skal forklare hvorfor f er integrerbar på $[0,2]$ for alle $a,b,c \in \mathbb{R}$.

SETN. 8.2.3.
Enhver monoton funksjon er integrerbar.
Nok at den er stykkevis monoton

- Vi har f på $[0,2]$
  - f er deriverbar på $(0,\frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2},2]$
  - $f = \begin{cases} c & \text{for } x=0 \quad \text{(begrenset)} \\ \frac{ax\cos x}{\sin x}+2 & \text{på } (0,\frac{\pi}{2}) \text{ (begrenset)} \\ bx+1 & \text{på } [\frac{\pi}{2},2] \text{ (begrenset)} \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax\cos x}{\sin x} + 2 \equiv a+2$$

x på $(0,\frac{\pi}{2}) \Leftarrow \frac{\pi}{2}$

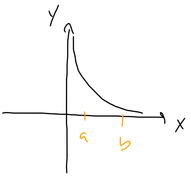
$\cos x$ på $(0,\frac{\pi}{2}) < 1$

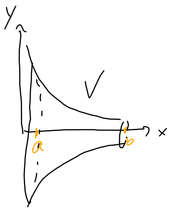
- Vi har en funksjon som er begrenset og deriverbar, så vi kan dele opp $[0,2]$ i biter der f er monoton.
- Så f er integrerbar ved setning 8.2.3.

MAT 1100
2020 - (2)

- $0 < a < b$

  Skal finne volumet av omdr. legemet om x-aksen av $f(x) = \frac{1}{x}$ på $[a, b]$.





$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx \qquad \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_a^b$$

$$= \pi \left[-b^{-1} - (-a^{-1}) \right]$$

$$= \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

- Skal bestemme a og b slik at $V = 100$

$$V = 100 = \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\frac{100}{\pi} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{100}{\pi} + \frac{1}{b}$$

$$a = \frac{1}{\frac{100}{\pi} + \frac{1}{b}}$$

$$a(b) = a = \frac{\pi b}{100b + \pi}$$

For valg $b = \pi$ $\quad a = \frac{\pi}{101} < b$

MAT 1100 - 2020

(8) Skal vise at hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er to ganger deriverbar funksjon slik at

$$f'(0) = f(0) \quad \text{og} \quad f'(1) = f(1)$$

så finns $c \in (0,1)$ s.a. $f'(c) = f''(c)$.

$$(f - f')'(c) = f''(c) - f''(c) = 0$$

$$g(x) = f(x) - f'(x)$$

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f'(0) = 0 \\ g(1) &= f(1) - f'(1) = 0 \end{aligned}\right\} \; g(0) = g(1)$$

og g er kontinuerlig og deriverbar på $(0,1)$

Da kan vi bruke Rolles teorem:

Det finns $c \in (0,1)$ s.a. $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - f''(x)$$

$$0 = g'(c) = f'(c) - f''(c)$$

Altså er $f'(c) = f''(c)$.

MAT-INF 1100 - 2016

(2) Taylorpolynomet av grad 3 om $a = 1$ for

$$f(x) = \ln x$$

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$n = 3$

$a = 1$

$$\begin{cases} f(x) = \ln x & f(1) = \ln 1 = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} & f''(1) = -1 \\ f^3(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} & f^3(1) = 2 \end{cases}$$

$$T_3 f(x) = \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^3(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= 0 + (x-1) + \frac{(-1)}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

Svar på oppgaven: $= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

Taylor-rekken: $f^n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$

Kan vises ved induksjon!

- ok for $n = 0, 1, 2, 3$
- Anta ok for $n = k$

P_k: $f^k(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$

- Må vise P_{k+1} holder:

$$\left(f^k(x)\right)' = f^{k+1}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(-k)\,x^{-k-1}$$

$$= (-1)^k k!\, x^{-(k+1)}$$

så ved induksjon har vi $f^n(x)$ som over.

- $f^n(1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 1$
- $$Tf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

(4) $y'' - 4y' + 4y = 0$ $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$y(x) = y_h(x)$:

Kar. pol: $r^2 - 4r + 4 = 0 = (r-2)^2$

$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$

$r = 2$

$y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$, $C, D \in \mathbb{R}$

- $y(0) = Ce^0 + D \cdot 0 \cdot e^0 = C = 1$
- $y'(x) = Ce^{2x} \cdot 2 + D(1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x})$

  $y'(0) = C \cdot e^0 \cdot 2 + D(1 \cdot e^0 + 0 \cdot 2e^0)$

  $= 2C + D = 1$

  $2 + D = 1$

  $D = -1$

- $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$

(5)

$x^2 y' y^2 = 2x$ separabel

$g(y) \cdot y' = p(x)$

$x \neq 0$

$y^2 y' = \frac{2}{x}$

$\int y^2 y' dx = \int y^2 dy$

$\int y^2 dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$

$\frac{1}{3} y^3 = 2 \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$y^3 = 6 \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$y = \sqrt[3]{6 \ln|x| + C}, \quad C \in \mathbb{R}$

Kan velge $C = 0$ her på flervalgsoppgaven

$y(x) = (6 \ln|x|)^{\frac{1}{3}}$

$= (\ln x^6)^{\frac{1}{3}}$

MAT 1110 - 2008

(4) (a) Skal finne konvergensområdet til $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{n+1}$

Se på

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{(n+1)}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{(2(n+1)+1)}}{\frac{(n+1)+1}{\frac{x^{2n+1}}{n+1}}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)+1}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| x^2 \cdot \frac{(n+1)}{(n+2)} \right|$$

$$= |x^2|$$

$$= x^2$$

- Konvergerer hvis $x^2 < 1$, så $x \in (-1, 1)$
- Sjekk $x = 1$ og $x = -1$
  - $x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n+1}$ $\boxed{(-1)^{2n} = 1}$

    Vet at $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n}$ divergerer

    og da må $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ divergere
  - $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ kan ved å sammenlikne med $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer