MAT 1100 Forelesning 20 1/10/2024 ①

Repetisjon

Kap. 3, 4, 5, 6, 7, 8 (de relevante avsnitt, se informasjon om midtveiseksamen på kursets nettside)

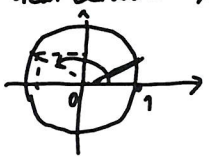
Kap. 3: Komplekse tall: kartesisk form, polar form, n-røtter, de Moivres formel, røtter til polynomer, løse likninger

Opp. ①/2018 Skriv $z = 12e^{i(5\pi/6)}$ på kartesisk form som

$$z = 12\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

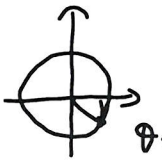
$$= 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right).$$

$$= -6\sqrt{3} + 6i \quad (E).$$



Opp. ③/2018 Skriv $z = 2 - 2i$ på polar form: $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$.

$a = 2, b = -2$



$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi har z i 4re kvadrant

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ i første omløp. Altså er $z = \sqrt{8}\,e^{i(7\pi/4)}$.

Opp. ①/2022 Hvilken z oppfyller $z^3 = -64$. (Er en tredjerot til -64.)

Skriv $w = -64$ på polar form, som er

$$w = 64\cdot(-1) = 64e^{i\pi}, \quad r = 64, \quad \theta = \pi.$$

Denne har 3-røtter $w_0 = r^{1/3}e^{i\theta/3} = 4e^{i(\pi/3)}$.

$(w_1 = r^{1/3}e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3})}, \quad w_2 = r^{1/3}e^{i(\frac{\theta}{3}+\frac{2\cdot 2\pi}{3})})$ **A**.

Opp. ⑥/2022 Mengden av z i $\mathbb{C}$ som oppfyller $|z-1-i| = 2$. beskrives som: for $z = x+iy$, er $|z-1-i|^2 = |(x+iy)-1-i|^2$

$$= |\underbrace{x-1}_{a} + i\underbrace{(y-1)}_{b}|^2 \qquad \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 2.$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

$w = x-1 + i(y-1)$, $|w|^2 = a^2+b^2$

Så ser etter z hvor $(x-1)^2+(y-1)^2 = 4$. En sirkel med senter i $(1,1)$ og radius 2 (eller senter i $i+1$).

Generelt: $|z - z_0| = r$, $r > 0$ beskriver en sirkel i det komplekse planet med sentrum i z_0 og radius r.

Kap. 4 Konvergens av følger ②

⑤/2014 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3n^3-5n^4}{3+2n+n^3+2n^4}$ (Del på høyeste potens av n i nevner og teller)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n}-5}{\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n}+2}$$

$$= \frac{0+0-5}{0+0+0+2} = -\frac{5}{2}.$$

⑬/2014 $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4-n^2}-n^2)$ (Vi ganger med det konjugerte uttrykket)

$u^2-v^2=(u-v)(u+v)$ ↖ konjugerte ↗

$u=\sqrt{n^4-n^2}$, $v=n^2$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^4-n^2}-n^2)(\sqrt{n^4-n^2}+n^2)}{\sqrt{n^4-n^2}+n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^4-n^2})^2-n^4}{\sqrt{n^4-n^2}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4-n^2-n^4}{\sqrt{n^4-n^2}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{\sqrt{n^4-n^2}+n^2}$$

deler på høyeste potens av n, her n^2

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{\sqrt{n^4(1-\frac{1}{n^2})}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Kap. 5 Kontinuitet og grenseverdier ③

Oppg ⑱/2018 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, gitt $\varepsilon > 0$.
Hvilket krav sikrer at $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$?

A) $|x-2| < \frac{\varepsilon}{6}$.

B) $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $|x-2| < \varepsilon^2$.

C) $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ og $|x-2| < 1$.

D) $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $|x-2| < \frac{1}{2}$.

E) $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ og $|x-2| < \varepsilon^2$.

$|h| < 1$ og $|h| < \frac{\varepsilon}{5}$

$\Downarrow$

$|h(h+4)| < |h| \cdot 5 < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

Følg strategien i eksempel 5.1.3 i Kalkulus.

Sett $h = x - 2$. Da er $x = h + 2$. Vi skriver videre ved å bruke denne x:

$$|f(x) - f(2)| = |f(h+2) - f(2)| = |((h+2)^2 + 1) - (2^2 + 1)| = |h^2 + 4h + 4 + 1 - 4 - 1|$$
$$= |h^2 + 4h| = |h(h+4)| = |h| \cdot |h+4|.$$

Siden vi ønsker $|h|$ "liten", vi krever at $|h| < 1$. Dette medfører, at

$|h+4| \leq |h| + |4| = |h| + 4 < 1 + 4 = 5$. Sammen får vi

$|h| \cdot |h+4| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$ dersom vi også krever at $|h| < \frac{\varepsilon}{5}$.

I Eksempel 5.1.3 skrives dette som $|h| = \text{minimum av } \frac{\varepsilon}{5} \text{ og } 1$.

Kap 6 Derivasjon, skjæringssetningen, middelverdisetningen, l'Hopital, kurvediskusjon ④

Oppg 9/2018 $h(x) = g(f(x))$, f, g to ganger deriverbare. Da er

$$h''(x) = (h'(x))' = (g(f(x)))' = \underbrace{(g'(f(x))}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{f'(x)}_{f_2(x)})' \quad \text{kjerneregelen.}$$

produktregel

$$= (g'(f(x)))' \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot (f'(x))'$$

kjerneregel

$$= (g''(f(x)) \cdot f'(x)) \cdot f'(x) + g'(f(x)) \cdot f''(x)$$

$$= g''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x).$$

Kap 5 ⑩/2018

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

(Bruk regneregel 5.4.3 (iv), F=1, G=1, a=0)

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Eller ved l'Hôpital's regel.

Kap 6 ⑰/2015 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig, f deriverbar på (a,b)

Hva er sant? Det finnes $c \in (a,b)$ slik at:

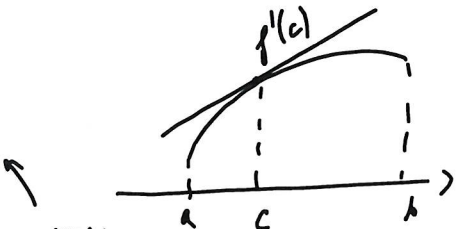
A) $f(b) - f(a) = f'(c)$.

B) $f(b) - f(a) = f'(c)(a-b)$

✓ C) $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$

D) $f'(c) = (f(b) - f(a)) \cdot (b-a)$

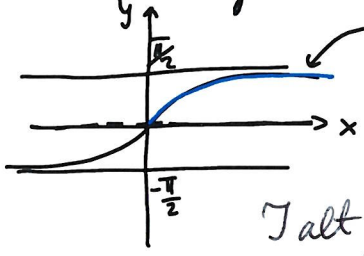
E) $f(c) = (f(b) - f(a)) \cdot (b-a)$



middelverdisetningen.

⑰/2018 (Kap. 7). $f(x) = 2\arctan(e^x)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Finn g, den omvendte til f.

$y = f(x)$ blir $y = 2\arctan(e^x)$, så $\frac{y}{2} = \arctan(e^x)$ ⊛



Da er $\tan\left(\frac{y}{2}\right) = \tan(\arctan(e^x))$, når vi har:

$e^x > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$

$= e^x$

$0 < \arctan(e^x) < \frac{\pi}{2}$ dette gjelder

Talt, $\tan\left(\frac{y}{2}\right) = e^x$, dermed $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$.

$= g(y)$.

Bytter tilbake til x: $g(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$,

$0 < y < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

som variabelnavn