10/09/2024

MAT 1100 Forelesning 11 ①

Kapittel 6.1 Derivasjon

Vi definerer følgende: for en funksjon f definert på et intervall på formen $(a-c, a+c)$, a reelt tall, $c>0$

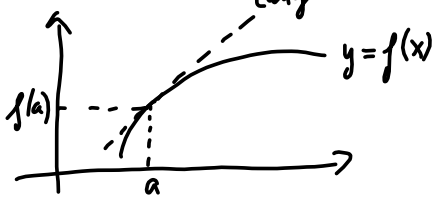


et slikt intervall er et omegn av punktet a.

vi sier at f er deriverbar i punktet a dersom grensen $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ eksisterer. I så fall, vi skriver

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Geometrisk:



$f'(a)$: er stigningstallet til tangenten til $y=f(x)$ i punktet $(a, f(a))$.

Kjente formler:

- $(c)' = 0$, funksjonen er konstant, $f(x)=c$ på et intervall.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$, for $a>0$; spesielt $(e^x)' = e^x$.
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

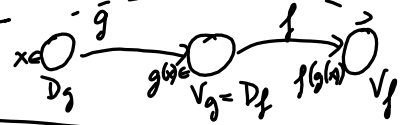
Regneregler

Anta at f og g er deriverbare i et punkt a, og at c er en konstant.
Da er $c\cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ også deriverbare i a.
Dersom $g(a)\neq 0$ vil også $\frac{f}{g}$ være deriverbar i a. Videre gjelder at:

- $(cf)'(a) = c\cdot f'(a)$
- $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$; $(f-g)'(a) = f'(a)-g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Kjerneregelen

$f\circ g$ $\qquad (f\circ g)(x) = f(g(x))$



$$\boxed{(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x).}$$

Eksempel: $f(x) = x^2\ln(2x^4+1)$

$$f'(x) = (x^2)'\ln(2x^4+1) + x^2\cdot(\ln(2x^4+1))' \quad \text{produktregel}$$
$$= 2x\ln(2x^4+1) + x^2\,\frac{1}{2x^4+1}\cdot(2x^4+1)'$$
$$= 2x\ln(2x^4+1) + \frac{8x^5}{2x^4+1}.$$

Følgende er sant: dersom f er deriverbar i punktet $a\in I$ er f kontinuerlig i a.
(f definert på et intervall I)

Trenger: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Vet: $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).}$

Sett: $x-a=h$. Gitt $\varepsilon>0$, vi kan finne $\delta>0$ s.a.
$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$ når $|x-a|<\delta$. Eller, for $|h|<\delta$
er $\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| < \varepsilon$ (har brukt $x = a+h$).

Altså, vi har $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Definerer ny funksjon: $\eta(h) = \begin{cases}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{når } h\neq 0\\ 0 & \text{når } h=0\end{cases}$.

(η leses som "eta") ↖ Gresk bokstav. Vi har $\lim_{h\to 0}\eta(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0$.

Før $f(a+h) - f(a) = h\cdot\eta(h) + f'(a)\cdot h$. Før

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) = \lim_{h\to 0} h\cdot\eta(h) + f'(a)\lim_{h\to 0} h = 0.$$

Så $\boxed{\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)}$

Logaritmisk derivasjon

Setning 6.1.10. Hvis f er deriverbar og forskjellig fra 0 i punktet x, da er $f'(x) = f(x)\cdot(\ln|f(x)|)'$.

Bevis: Kjerneregelen $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, deretter ganger vi med $f(x)$ begge sider.

Eksempel 1 $f(x) = (x^2+1)^{\cos x}$. Finn $f'(x)$.

$\ln|f(x)| = \ln(x^2+1)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(x^2+1)$.

$(\ln|f(x)|)' = (\cos x)'\ln(x^2+1) + \cos x\cdot(\ln(x^2+1))'$ ved produktregelen

$= -\sin x\cdot\ln(x^2+1) + \cos x\cdot\frac{2x}{x^2+1}$.

Da er $f'(x) = f(x)\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(x^2+1) + \cos x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Eksempel 2 $f(x) = (x^2+1)(x^3+4)\cos^5 x$. Finn $f'(x)$

$\ln|f(x)| = \ln(|x^2+1|\cdot|x^3+4|\cdot|\cos^5 x|) = \ln|x^2+1| + \ln|x^3+4| + \ln|\cos^5 x|$.

$(\ln|f(x)|)' = (\ln|x^2+1|)' + (\ln|x^3+4|)' + (\ln|\cos^5 x|)'$ sum regelen. $(\ln|u|)' = \frac{1}{u}u'$

$= \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+4} + \frac{5\cos^4 x}{\cos^5 x}\cdot(-\sin x)$.

Da er $f'(x) = f(x)\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+4} - 5\tan x\right)$

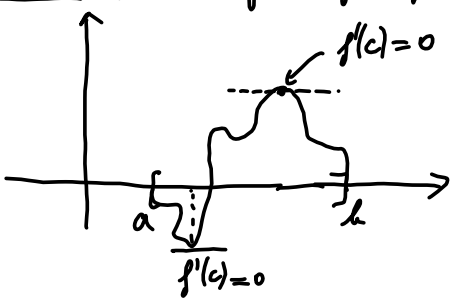
$= 2x(x^3+4)\cos^5 x + (x^2+1)\cdot 3x^2\cdot\cos^5 x - 5(x^2+1)(x^3+4)(\tan x)\cdot\cos^5 x$.

Kapittel 6.2 Middelverdisetningen

Setning 6.2.1 Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ har et maksimum eller minimum i et indre punkt $c\in(a,b)$. Hvis f er deriverbar i c, da er $f'(c)=0$.

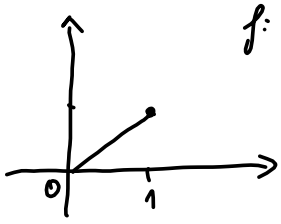
maksimum(punkt) $f(x)\le f(c)$ for alle $x\in[a,b]$.
↑ maksimumsverdi

minimum(punkt) $f(x)\ge f(c)$ for alle $x\in[a,b]$



Viktig: c er ikke endepunkt.

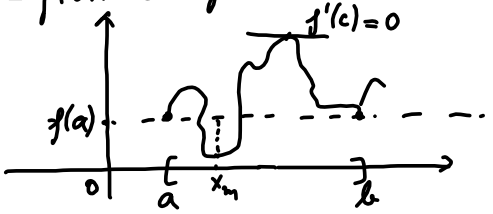
Se på



$f:[0,1]\to\mathbb{R}$
$f(x)=x$.
0: minimum
1: maksimum
Men $f'(x)=1$ for alle $x\in[0,1]$

Rolle's teorem (6.2.2) (5)

Gitt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$ som er deriverbar i alle punkter $x\in(a,b)$, og slik at $f(a)=f(b)$. Da finnes det et $c\in(a,b)$ hvor $f'(c)=0$.



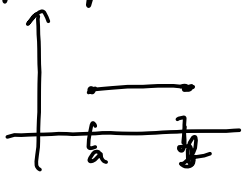
Bevis: Siden f er kontinuerlig på et lukket og begrenset intervall, altså $[a,b]$, får vi fra ekstremalverdisetningen et minimumspunkt, kall det x_m, og et maksimumspunkt, kall det x_M.

Med andre ord: $f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)$, for alle $x\in[a,b]$.

($f(x_m)$: minimumsverdi; $f(x_M)$: maksimumsverdi til f på $[a,b]$)

Vi ønsker å bruke forrige resultatet. Har flere tilfeller:

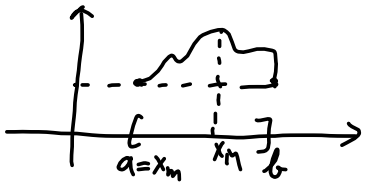
- $f(x)=f(a)=f(b)$, alle x, da er $f'(x)=0$. Alle $c\in(a,b)$ har det ønskede $f'(c)=0$.

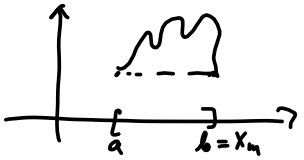


- Hvis f er ikke konstant, da er $f(x_m)<f(x_M)$.

  Hvis $a<x_m<b$, har vi $f'(x_m)=0$ fra forrige setning.

  Hvis $x_m=a$.





  $f(x_m)=f(a)=f(b)<f(x_M)$, da kan ikke x_M være a eller b, så $a<x_M<b$. Derfor: $f'(x_M)=0$ fra forrige setning.

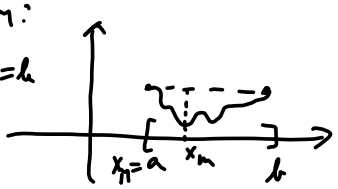
  Hvis $x_m=b$, vi får igjen $x_M\in(a,b)$. Så $f'(x_M)=0$.

Hvis vi ser på x_M:

hvis $x_M=a$ eller $x_M=b$

blir $a<x_m<b$,

og $f'(x_m)=0$.



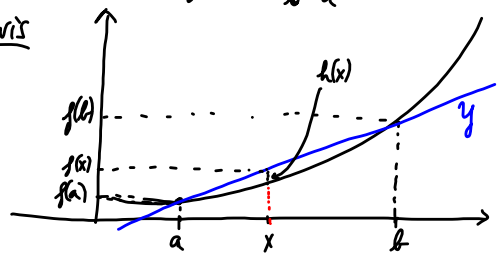
∎.

Middelverdisetningen (6.2.3)

Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i alle indre punkter $x\in(a,b)$.
Da finnes det et $c\in(a,b)$ s.a.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bevis ($a<b$)



Den rette linjen gjennom $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$ har ligning:

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

$h(x)$ = avstanden fra linjen gitt ved y til grafen til f i $(x,f(x))$

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),\quad x\in(a,b),$$

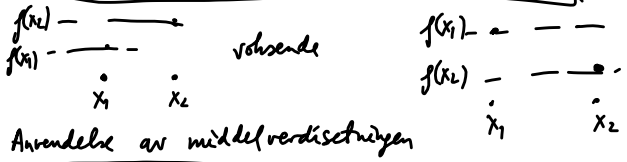
Har at h er kontinuerlig på $[a,b]$, med $h(a)=0=h(b)$.
h deriverbar på (a,b), og $h(a)=h(b)$. Av Rolle's teorem anvendt på h finnes det $c\in(a,b)$ med $h'(c)=0$.

Men $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. } Så $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, som ønsket. ∎

$f:I\to\mathbb{R}$ intervall. Sier, at

f er (strengt) voksende dersom for $x_1<x_2$ er $(f(x_1)<f(x_2))$ $f(x_1)\le f(x_2)$.

f er (strengt) avtagende dersom for $x_1<x_2$ er $(f(x_1)>f(x_2))$ $f(x_1)\ge f(x_2)$



Anvendelse av middelverdisetningen

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kontinuerlig, deriverbar på (a,b).
Dersom $f'(x)\ge 0$ på (a,b), er f voksende på $[a,b]$.
Dersom $f'(x)\le 0$ på (a,b), er f avtagende.

Hvorfor? For (x_1,x_2), finn $c\in(x_1,x_2)$: $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Om $f'(x)\ge 0$ er $f'(c)\ge 0$ så $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge 0$.

Da $x_2-x_1>0$ vil $f(x_2)\ge f(x_1)$.

Om $f'(x)\le 0$, fra $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le 0$ får vi $f(x_2)\le f(x_1)$ (avtagende).

Eks: $f(x)=2-e^x$ på $[0,1]$.

$f(0)=2-1=1>0$, $f(1)=2-e<0$

Skjæringssetningen: gir $c\in[0,1]$ hvor $f(c)=0$. } Da er c eneste nullpunkt til f i $[0,1]$.

$f'(x)=-e^x\le 0$ på $[0,1]$ så f er avtagende (strengt avtagende).