MAT 1100 Forelesning 34 11/11/2024 (1)

Kapittel 12.5 Rekker av funksjoner

Ser på: $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$. Interessen er i $\begin{cases} \nearrow \text{konvergerer punktvis?} \\ \searrow \text{—"— uniformt?} \end{cases}$

Definisjon: Gitt en rekke av funksjoner $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$.

(a) For $n \geq 0$, $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k(x)$ den n'te delsummen til rekken.

[$s_0(x) = v_0(x)$, $s_1(x) = v_0(x) + v_1(x)$, $s_2(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x)$, ...].

(b) Rekken konvergerer punktvis mot en funksjon v dersom

$\{s_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $v(x)$, for alle x i definisjonsdomenet A

(c) Rekken konvergerer uniformt mot v dersom

$\{s_n(x)\}$ konvergerer uniformt mot v på A.

Et nyttig resultat:

12.5.1 Weierstrass' M-test:

Gitt $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ med $v_n : A \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Anta at det finnes en konvergent rekke $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ med alle $M_n \geq 0$,

og slik at: for hvert $n \geq 0$: $|v_n(x)| \leq M_n$ for alle $x \in A$.

Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ uniformt og absolutt på A.

Merknad: v er ikke eksplisitt i påstanden. Den defineres underveis.

11/11/2024

Eksempel

① Eks. 12.5.2 Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergerer uniformt på $[-1,1]$. ②

Bruker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, som er konvergent; $M_n = \frac{1}{n^2}$.

M-testen: for $n \geq 1$ er $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ for alle $x \in [-1,1]$.

Av Weierstrass's M-test er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ uniformt konv. på $[-1,1]$.

② ~~Eks~~ Oppg. 12.5.2(a)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$. Bruker M-testen: $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Rekken konvergerer unif. for alle $x \in \mathbb{R}$.

③ Ser på $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Fungerer M-testen her?

$\left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n}$ og vi får $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ når $|x| \leq 1$. Men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer.

Klarer ikke å teste for uniformt konv.

Ser på punktvis konvergens.

Gitt x, får tallrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Husk testene for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ { forholdstest, rottesten.

Med $a_n = \frac{x^n}{n}$, vi får: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^n \cdot x}{x^n} = \frac{n}{n+1} \cdot x$

Forholdstesten: (12.4.5)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot |x| = |x|$$

For $|x| < 1$ vil rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergere

For $|x| > 1$ -||- ——— divergere.

Sjekker $|x| = 1$: når $x = 1$, er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_n \frac{1}{n}$, og divergerer.

når $x = -1$, er $\sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerer ved testen for alternerende rekker: 12.3.1

I alt, vil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergere punktvis for $x \in [-1,1)$.

Kalles konvergensområdet til rekken.

Definisjon Gitt $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$, mengden av punkter x slik at $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ konvergerer punktvis kalles konvergensområdet til rekken. 11/11/2024 (3)

Eks: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ har konvergensområde $[-1, 1)$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$. (Ligner på oppg. 12.5.1 b))

Gitt et x, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$, $r = \frac{x}{3}$, det er en geometrisk rekke.

Fra 12.1.1 vil $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ konvergere når $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, altså for $x \in (-3, 3)$,

· og -"- vil divergere når $\left|\frac{x}{3}\right| \geq 1$, altså for $|x| \geq 3$.

Så konvergensområdet er $(-3, 3)$.

Merk: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot x^n$.

Kap. 12.6 Potensrekker

Def: En potensrekke er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

hvor $a_0, a_1, a_2, \dots$, og a er tall (reelle).

Ofte: vil vi la $a=0$, får $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Konvergens av potensrekker

11/11/2024 (4)

12.6.1 Teorem

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ være en potensrekke. Det er 3 muligheter (alternativer):

(i) Potensrekken konvergerer for alle x i $\mathbb{R}$.

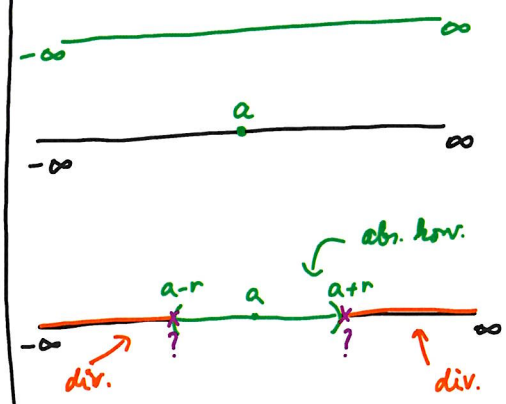
(ii) Potensrekken konvergerer bare i $x=a$.
(Da er den lik a_0.)

(iii) Det finnes et $r>0$ slik at:
- for $|x-a|<r$ vil rekken konvergere absolutt

og for $|x-a|>r$ —"— divergere.

I endepunktene $|x-a|=r$ ingen generell konklusjon, vi må teste. Tallet r kalles konvergensradius.

Konvergensområde:



Eksempel 1 (Alternativ (i)) 12.6.4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_0 = 1$. (vi setter det slik).

Forholdstesten: (La $x \in \mathbb{R}$) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\cdot|x| = 0 < 1$ for vilkårlig $x \in \mathbb{R}$. Potensrekken konvergerer for alle x. (Konvergensradius er ∞).

② (Alternativ (ii)) 12.6.5 $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

For $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, forholdstesten: $\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\,x^{n+1}|}{|n!\,x^n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot|x| = \infty$. I $x=0$ er rekken lik 0 og er konvergent. (Rekken har konvergensradius 0).

③ (Alt. (ii)). $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. La $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, bruk rottesten!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n\cdot|x| = \infty$$

Legg til: rekken konvergerer bare i $x=0$.

④ (Alternativ (iii)) Eks. 12.6.2 11/11/2024 ⑤

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

La $x\in\mathbb{R}$, forholdstesten blir: $\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+2)x^{n+1}|}{|(n+1)x^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot|x|=|x|$. Vi får konvergens dersom $|x|<1$ og divergens for $|x|>1$.

Sjekker endepunktene

$x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$ divergerer siden $(n+1)(-1)^n$ går ikke mot 0.

$x=1$ $\sum(n+1)$ —"— $n+1$ —"— .

Her: $r=1$ og konv.omr. er $(-1,1)$.

⑤ (iii) Variant av eks. 12.6.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\cdot 3^n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$.

Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{2^n}{n^2\cdot 3^n}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)=\frac{2}{3}\left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{|2x+1|}{3}.$$

Får konvergens når $\frac{|2x+1|}{3}<1$. Løser: $-3<2x+1<3$, får $x\in(-2,1)$.

$-2<x$ og $x<1$

Får divergens når $\frac{|2x+1|}{3}>1$.

Sjekker endepunktene: for $x=-2$, får $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2\cdot 3^n}=\sum\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n^2\cdot 3^n}=\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ konv. ved testen for alternerende rekker.

- for $x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, også konv.

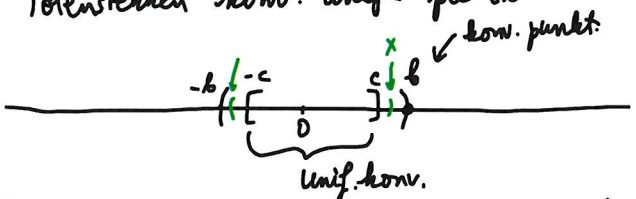
Konv. området er $[-2,1]$.

Viktig : 12.6.7 (Lemma) (6)

(Antar $a=0$) Gitt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definert på A,

Antar at for $x_0 = b$, $b \neq 0$ er $\sum a_n b^n$ konv, $x_0 \in A$.

- Da konvergerer potensrekken absolutt for alle x med $|x| < |b|$.
- Potensrekken konv. unif. på intervaller $[-c, c]$, hvor $0 < c < |b|$.



Bevis Skisse Av $\sum a_n b^n$ konvergerer, får vi: $\{a_n b^n\}$ konvergerer mot 0.

Merknad: om $\{x_n\}$ går mot 0 finnes det et $K > 0$ så $|x_n| \leq K$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$0 < c < |b|$: $|a_n x^n| = |a_n b^n \cdot (\frac{c}{b})^n| \leq K \cdot |\frac{c}{b}|^n$ for alle n, alle x med $|x| \leq c$.

Legg til:

$|\frac{c}{b}| < 1 \rightsquigarrow$ konvergent geom. rekke

M-testen : $\sum a_n x^n$ konv. unif på $[-c, c]$.