MAT 1100 Forelesning 35 12/11/2024

Tirsdag 26 nov: prøveeksamen 9-13.
Kl: 14-16 i Sophus Lie Aud
Gjennomgang

Kapittel 12

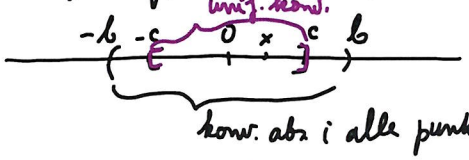
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Viktig lemma (12.6.7, vi antar $a=0$).
Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergerer for et $b \neq 0$, så:

(i) $\sum a_n x^n$ konvergerer absolutt for alle x med $|x| < |b|$.

(ii) $\sum a_n x^n$ —u— uniform på alle $[-c, c]$, $0 < c < |b|$

Tegning når $b > 0$:



For beviset: (ii) For x med $0 < |x| \leq c < b$:

For $n \geq 1$, $|a_n x^n| = |a_n b^n| \cdot \left|\frac{x^n}{b^n}\right| = |a_n b^n| \cdot \left|\frac{x}{b}\right|^n$

Vi bruker, at

Finner $K > 0$ så $|a_n b^n| \leq K$ for alle n, og $\left|\frac{x}{b}\right| \leq \left|\frac{c}{b}\right| < 1$.

Av M-testen, $\sum a_n x^n$ konvergerer unif. siden den er dominert av den geometriske rekken $\sum K \cdot \left|\frac{c}{b}\right|^n$, som konvergerer. Dette viser (ii).

For (i), la $|x| < |b|$, finn c så $|x| < c < |b|$, bruk (ii).

Bruker dette til å vise at teoremet om konvergensradius:

Sett $r = \sup\{|b| \mid \sum a_n b^n \text{ konvergerer}\}$. Dette oppfyller 12.6.1. (iii).

Hvis tilfellene (i) og (ii) i Teorem 12.6.1 ikke er tilfredstilt.

12/11/2024

Abels teorem (kontinuitet)

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ har konvergensradius r.

For $r>0$, definer $s:(a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ ved

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n .$$

Da er s kontinuerlig.

Dersom potensrekken konvergerer for alle x, er s kont. på $\mathbb{R}$.

- Hvis rekken konvergerer i $a+r$, er s kont. nedfra

$$s(a+r) = \lim_{x \to a+r^-} s(x) .$$

- — 4 ——— $a-r$, er $s(a-r) = \lim_{x \to a-r^+} s(x)$.

(Vi skal ikke gi beviset!

Kap 12.7

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $r>0$ konv.radius (anta)

La $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $f:(a-r, a+r)\to\mathbb{R}$.

Det x:

(*) $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$

Spørsmål ①: Gjelder

$f'(x) = a_0' + (a_1(x-a))' + (a_2(x-a)^2)' + \ldots + (a_n(x-a)^n)' + \ldots$? (Det gjelder for endelig sum av funksjoner Kap. 6)

Altså, er

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + n a_n(x-a)^{n-1} + \ldots$?

Sp. ① $= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$?

Spørsmål ② Gjelder

$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1(t-a)\,dt + \int_a^x a_2(t-a)^2\,dt + \ldots + \int_a^x a_n(t-a)^n\,dt + \ldots$?

hvor $x\in(a-r, a+r)$. Altså, er

$\int_a^x f(t)\,dt = a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \ldots$?

Sp. ② $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$?

Svarene er "ja", og beviset går tilbake til det viktige lemma og kap. 11.

12/11/2024

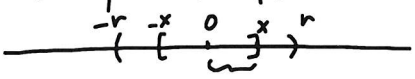
② **Setning 12.7.1** Gitt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ med konv. radius $r>0$,

for alle $x \in (a-r, a+r)$ vil

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ konvergere og ha sum $\int_a^x f(t)\,dt$, hvor $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Bevis: Vi antar $a=0$.

Har $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konv. abs. på $(-r,r)$. (fra lemma) og $\sum a_n t^n$ konv. unif. på $[-x,x]$,



$= f(t)$ så på $[0,x]$.

Delsummene er en konvergent følge:

$f_N(t)=\sum_{k=0}^{N} a_k t^k$, $\{f_N(t)\}$ konvergerer unif. mot f på $[0,x]$.

Kap 11 (11.4.1): $\lim_{N\to\infty} \int_0^x f_N(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \int_0^x a_k t^k\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$ ∎

② **Setning 12.7.3**

Gitt $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ med konv. radius r, da er

f deriverbar på $(a-r, a+r)$ og

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$ (Vi gir ikke beviset!)

Eksempel (12.7.4) 12/11/2024 (5)

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$: så $a=0$.

Notasjon som i Setning 12.1.1.

Det er en geometrisk rekke: $r=-x$, $a_0=1$.

Ved Setning 12.1.1 konvergerer denne bare når $|r|=|x|<1$, og

summen er $\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$.

Så $f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $x\in(-1,1)$.

Vi deriverer den: av 12.7.3 får vi: $\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}=(-1)1\cdot x^0+(-1)^2\cdot 2x^1+\ldots$

Så $-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$. Ganger (-1) på V.S og H.S.

Altså: $\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$, for $x\in(-1,1)$ En ny potensrekke.

Vi integrerer: 12.7.1 gir $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n\,dt$,

så $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}$, $x\in(-1,1)$. Endnå en ny potensrekke.

Merk: denne konvergerer for $x=1$ (av den alternerende test).

Denne gjelder også i $x=1$.

Får: $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

Se også eks 12.7.5 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, $r=-x^2$ ← Notasjonen i Setning 12.1.1

ved integrasjon får vi en potensrekke for arctan.

Kap. 12.8 Taylorrekker 12/11/2024

Ser på $f: A \to \mathbb{R}$ hvor $f^{(k)}(a)$, for $a \in A$, eksisterer for alle $n \in \mathbb{N}$.

Taylorrekken til f i punktet a defineres som

$$(Tf)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

Det er en potensrekke.

Eks: $f(x) = e^x$, $a = 0$; $f^{(k)}(a) = e^a$, så $f^{(k)}(0) = 1$

$$(Tf)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Har (12.8.1) Taylorrekker:

(i) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, alle x.

(iii) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, alle x. (Dette vier, at for et vilkårlig x, $\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} \cos x = 0$).

Samme for (ii).

12.8.3 (Generelt)

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ konvergerer i $(a-r, a+r)$, hvor $r > 0$,

og la $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Da er $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ for alle $n \geq 1$.

(Så den gitte potensrekken er Taylor rekken i a).

Bevisskisse: $f'(x) = \underset{0}{a_0'} + \underset{a_1}{(a_1(x-a))'} + \underset{2a_2(x-a)}{(a_2(x-a)^2)'} + \ldots$, så $f'(a) = a_1$.

$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 (x-a) + \ldots$, $f''(a) = 2a_2$

Fortsatt: $f^{(k)}(a) = k! a_k$.

Eksempel 12.8.5

Finn summen til $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(Eks. i forelesningen 11/11/2024): konv for $x \in [-1, 1)$.

La $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in [-1,1)$, være summen.

Hva er $s(x)$?

Prøver derivasjon: $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\text{geometrisk rekke}} = \frac{1}{1-x}$, for $x \in (-1,1)$.

$$\Rightarrow s(x) = \int \frac{dx}{1-x} + C = -\ln|1-x| + C.$$

Finner C: men $s(0) = \sum \frac{0^n}{n} = 0$, så $C - \ln|1-0| = 0$, så $C = 0$.

Så $s(x) = -\ln|1-x|$ for alle $x \in (-1,1)$. Hva med $x = -1$?

Av Abels teorem er $s(x) = -\ln|1-x|$ for alle $x \in [-1,1)$. (Vi får tilbake $x=-1$)

(kontinuitet av ln og konv. av den opprinnelige rekken)

$$\text{Så} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| \quad \text{for } x \in [-1,1)$$

Se: 12.8.6 Brukes integrasjon på $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.