MAT 1100 Forelesning 22 14/10/2024

Kap. 9 Integrasjonsteknikker.

Litt oversikt:

9.1 Delvis integrasjon.

Resultat: For u, v kontinuerlige funksjoner med u', v' kontinuerlige, så er

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Anvendelse hertil: bestemme integraler ved hjelp av rekursjonsformler.

9.2 Substitusjon (den generelle regelen)

Enkel substitusjon (Kap. 8.3-8.4)

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C,$$ F er en antiderivert til f

for f kontinuerlig, g deriverbar.

Den generelle formen:

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(u)h'(u)\,du\Big|_{u=g(x)},$$

dersom f er kontinuerlig og g er deriverbar og strengt monoton.

med h den omvendte funksjonen til g, og h' kontinuerlig.

en antiderivert $\int f(u)h'(u)\,du$, og så sett variablen lik med $g(x)$

9.3 Delbrøkoppspaltning

Beregn $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, $P(x)$, $Q(x)$ polynomer.

F.eks. $\int \frac{cx+d}{(x^2+bx+e)^m}\,dx$, m naturlig tall.

14/10/2024 (2)

9.1 Delvis integrasjon

For u, v kontinuerlige med u', v' kontinuerlige er

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$$

(1) Eksempel 9.1.1

Beregn $I = \int xe^x\,dx$. Setter $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$.

Da er $u'(x) = 1$ og $v(x) = e^x$.

$$I = \int x(e^x)'\,dx = \underset{\uparrow u(x)}{x} \cdot \underset{\uparrow v(x)}{e^x} - \int x' \cdot e^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

(2) Eksempel (variant av Eksempel 9.1.2)

Beregn $I = \int x\cos x\,dx$.

Velger $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$.

Så $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$.

$$I = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

Hva om vi velger $u(x) = \cos x$, $v'(x) = x$?

Får $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$I = \int x\cos x\,dx = \int v'(x)\,u(x)\,dx = v(x)u(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\cos x - \int \frac{x^2}{2}\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\underbrace{\int x^2\sin x\,dx.}$$

← Det ser mer komplisert ut enn det vi startet med.

14/10/2024

(3) Eksempel: Beregn $\int x^2 \sin x \, dx$.
(Variant av eksempel 9.1.2)

Setter $u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin x$.

$u'(x) = 2x$, $v(x) = -\cos x$

$$I = \int x^2 \sin x \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

$$= -x^2 \cos x - \int 2x \cdot (-\cos x)\,dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x \, dx}_{x\sin x + \cos x + C_1}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C \quad \text{(her lar vi } C \text{ være } 2C_1\text{)}.$$

Bevis for formelen om delvis integrasjon

Produktregel for derivasjon gir, at

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Vi kan integrere på begge sider (alle funksjonene er kontinuerlige)

$$\int (u(x)v(x))'\,dx = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx$$

$$= \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

$= u(x)v(x) + C$ av analysens fundamental teorem. Trekker fra $\int u'(x)v(x)\,dx$ på begge sider av $=$:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) + C - \int u'(x)v(x)\,dx$$

$$= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

14/10/202

④ (4)

④ Eksempel 9.1.3

$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx$. Setter $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$,

så $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$.

Får, at $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - \int 1\cdot dx$

$= x\ln x - x + C$.

⑤ Variant av eksempel 9.1.5.

$$\int e^x\cos x\,dx = \int e^x(\sin x)'\,dx = e^x\sin x - \int (e^x)'\sin x\,dx$$

$$= e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$= e^x\sin x + \int e^x(\cos x)'\,dx$$

($u(x)$, $v'(x)$)

$$= e^x\sin x + e^x\cos x - \underbrace{\int (e^x)'\cos x\,dx}_{=\int e^x\cos x\,dx}$$

Flytter $\int e^x\cos x\,dx$ til venstre side.

Så $2\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x$, og

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x\sin x + \frac{1}{2}e^x\cos x.$$

(Vi kan legge en konstant C til høyre side).

Rekursjon

Ser på et eksempel:

$$\int e^x dx = \int 1 \cdot e^x dx = \int x^0 e^x dx = I_0.$$

$$I_1 = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C \quad \text{(eks. ①)}.$$

Sett $I_n = \int x^n e^x dx$.

$$= \int x^n (e^x)' dx$$

$$= x^n e^x - \int (x^n)' e^x dx$$

$$= x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx$$

$$= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

$$\boxed{I_n = x^n e^x - n I_{n-1}, \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1}$$

Hvordan bruker? F. eks., for $\int x^8 e^x dx$, regn ut "bakfra":

$n=3$ $\quad I_3 = x^3 e^x - 3 I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2 I_1)$

9.2 Substitusjon

Enkel substitusjon (Kap. 8.3 og 8.4)

For f kontinuerlig, g deriverbar, F en antiderivert til f.

Så er $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \overset{(*)}{=} F(g(x)) + C$, C konstant.

Brukes på formen: Sett $u = g(x)$.

Regn ut $du = g'(x)\,dx$

(*) blir $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$.

Til slutt, sett inn $g(x)$ i stedet for u.

Generell form Setning 9.2.3.

For f kontinuerlig, g deriverbar og strengt monoton, h omvendt funksjon til g med h' kont. så er

$$\int f(g(x))\,dx \overset{(**)}{=} \int f(u)\,h'(u)\,du\Big|_{u=g(x)}.$$

Eksempel ① (9.2.2) Beregn $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Løsning 1 (fra Kalkulus): $u = \sqrt{x}+1$ $\left(g(x) = \sqrt{x}+1,\ f(t) = \frac{1}{t}\right)$.

(Finner h:) $u - 1 = \sqrt{x}$

så $(u-1)^2 = x$. $\left(h(u) = (u-1)^2\right)$.

Regner ut $2(u-1)\,du = dx$ $\left(= h'(u)\,du\right)$.

(**) gir $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{1}{u}\cdot 2(u-1)\,du\Big|_{u=g(x)} = 2\int \frac{u-1}{u}\,du = 2\left[\int 1\,du - \int \frac{1}{u}\,du\right]$

$= 2u - 2\ln|u| + C = 2(\sqrt{x}+1) - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$. (1)

Løsning 2: $u = \sqrt{x}$ $\left(g(x) = \sqrt{x},\ f(t) = \frac{1}{t+1}\right)$. Her $h(u) = u^2$, $h'(u) = 2u$

$u^2 = x$

Her $2u\,du = dx$. Får $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{1}{u+1}\cdot 2u\,du\Big|_{u=g(x)} = 2\int \frac{u}{u+1}\,du$.

enkelt-eksempel på 9.3

Så $\int \frac{u}{u+1}\,du = \int \frac{u+1-1}{u+1}\,du = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)du$ — Får

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\left(\int 1\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du\right)\Big|_{u=g(x)} = \left(2u - 2\ln|u+1|\right)\Big|_{g(x)} + C_1 = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C_1$ (2)

Bevis for: $\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,h'(u)\,|_{u=g(x)}$

Når h er den omvendte funksj. til g gjelder:

$$h'(y) = \frac{1}{g'(x)}, \quad y = g(x).$$

Så $h'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$. Ganger med $g'(x)$

Får $h'(g(x))\,g'(x) = 1$. Ganger med $f(g(x))$

$$\int f(g(x))\,h'(g(x))\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(g(x))\,dx, \text{ og integrerer.}$$

|| Bruker enkel substitusjon $u = g(x)$

$\int (f \cdot h')(u)\,du$ og setter $u = g(x)$

||

$\int f(u)\,h'(u)\,du\,|_{\text{evaluert i } u=g(x)}$.