MAT 1100 Forelesning 23 15/10/2024 (1)

## Substitusjon (Kap. 9.2)

Fra forelesning 22: Enkel substitusjon: Her gitt: $g$ deriverbar med $g'$ kontinuerlig, $f$ kontinuerlig, $F$ en antiderivert til $f$.

Eksakt resultat 9.2.1 (9.2.2): Så er $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$, $C$ konstant.

Formell fremgangsmåte:
(i) $u = g(x)$ || formell
(ii) $du = g'(x)dx$ || formell
(iii) $\int f(u)\,du = F(u) + C$

Kommentar om (ii): her tar vi differentialet til $u$ og differentialet til $g$.

Huske: Setning 6.17 $g(x+h) - g(x) \approx g'(x)h$ ← Når $h$ er liten.
$g'(x)h$ ↝ differentialet til $g$: $dg(x,h)$

Dette kan vises: $\frac{dg(x)}{dx} = g'(x)$.

Eksempel (for Setning 9.2.1)

Beregn $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$. Bruker fremgangsmåten:

- $u = x^3+5$ $(g(x) = x^3+5)$
- $du = (x^3+5)'dx$, som er $du = 3x^2dx$
- $\int f(u)\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$. Da er $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \ln|x^3+5| + C$.

15/10/2024 ②

Substitusjon: 9.2.3

Vi er samt at Gitt: $f$ kontinuerlig, $g$ deriverbar og strengt monoton, den omvendte funksjonen $h$ til $g$ er slik at $h'$ er kontinuerlig.

Vi har $\underbrace{\int f(g(x))\,dx}_{\text{en antiderivert til } f(g(x)),\ \text{som funksjon av } x \text{ på } D_g} = \underbrace{\int f(u)h'(u)\,du}_{\text{en antiderivert til } f(u)h'(u),\ \text{som vi evaluerer i } g(x)}\Big|_{u=g(x)}$

Eksempel: Beregn $I = \int \cos\sqrt{x}\,dx$.

Fremgangsmåte:
- $u = \sqrt{x}$.
- $x = u^2$
- $[dx = (u^2)'du]$, kan utelates, så $dx = 2u\,du$ (OK: $\frac{dx}{2u} = 2u$)

Får $I = \left(\int \cos u \cdot 2u\,du\right)\Big|_{u=g(x)}$. Separat, finner $\int \cos u \cdot 2u\,du = 2\underbrace{\int u\cdot\cos u\,du}_{\text{har regnet ut med delvis integrasjon (forelesning 23? 22)}}$

Har $\int u\cos u\,du = u\sin u + \cos u + C_1$. Setter $g(x) = \sqrt{x}$ i stedet for $u$.

Får at $I = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} + C_1) = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$. Kaller $(2C_1 = C.)$

③

**Setning 9.2.7** Gitt $f, g, h$ som i setning 9.2.3, med $g$ definert på et intervall $[a, b]$.

Da er $$\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,h'(u)\,du .$$

**Bevis:** La $H$ være en antiderivert til $(f\cdot h')(u) = f(u)\cdot h'(u)$.

Av 9.2.3 er $\int f(g(x))\,dx = H(g(x)) + C$.

Av analysens fundamentalteorem er $\int_a^b f(g(x))\,dx = H(g(x))\Big|_a^b = H(g(b)) - H(g(a))$.

Siden $H$ en antiderivert, er også $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)h'(u)\,du = H(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = H(g(b)) - H(g(a))$ ∎

**Eksempel** (Oppg 9.2.3 (c)). Beregn $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\,dx$.

Fremgangsmåte (bruker setning 9.2.7):

- setter $u = \sqrt{x}$ $\quad (f(u) = \frac{u+1}{1-u})$
- finner $x = u^2$. $\quad (h'(u) = (u^2)' = 2u)$.
- finner $dx = 2u\,du$.

Har: $g(a) = g(4) = \sqrt{4} = 2$
$g(b) = g(9) = \sqrt{9} = 3$

$$I = \int_2^3 \frac{u+1}{1-u}\cdot 2u\,du = 2\int_2^3 \frac{u^2+u}{1-u}\,du .$$ ✍

Setter inn

Ser at $u^2+u$ er et polynom av grad 2, mens $1-u$ har grad 1.

Polynomdivisjon:

$u^2+u : -u+1$
$-(u^2-u) \quad -u-2$
$u^2+u-u^2+u = 2u$
$-(2u-2)$
$+2$

Så $u^2+u = (-u+1)(-u-2)+2$

$(u^2+u = (u-1)(u+2)+2.)$

$$I = 2\int_2^3 \frac{(1-u)(-(u+2))+2}{1-u}\,du = 2\int_2^3 (-(u+2))\,du + 2\int_2^3 \frac{2}{1-u}\,du$$

$$= (-2)\cdot\left(\frac{u^2}{2}+2u\right)\Big|_2^3 - 4\ln|1-u|\Big|_2^3$$

$$(-2)\cdot\left(\frac{3^2}{2}+2\cdot 3 - \left(\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)\right) = -2\left(\frac{3^2}{2}-\frac{2^2}{2}+2(3-2)\right) - 4(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0})$$

$$= -2\left(\frac{5}{2}+2\right) - 4\ln 2$$

$$= -5 - 4 - 4\ln 2 = -9 - 4\ln 2 .$$

$\ln(1-u)' = \frac{(1-u)'}{1-u} = \frac{-1}{1-u}$

**Eller:**
Regn ut separat $\int \frac{u^2+u}{1-u}\,du$ og deretter tar inn verdiene 3 og 2.

## 9.3 Delbrøkoppspalting (9)

Ønsker: regne ut $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, $P(x)$, $Q(x)$ reelle polynomer.

Idéen:
- nok å se på tilfellet hvor graden til $P(x)$ er mindre enn graden til $Q(x)$, så vi antar dette gjelder;
- nok å beregne (type I) $\int \frac{D}{(x-r)^n}\,dx$ og $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^m}\,dx$, (type II)

hvor $A, B, D, a, b, r \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Vi får: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ er en sum av integraler av type I og II.

Enkle tilfeller: type I, $n=1$: $\int \frac{D}{x-r}\,dx = D\ln|x-r| + C$.

type I, $n \geq 2$: $\int \frac{D}{(x-r)^n}\,dx = \frac{D}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-r)^{n-1}} + C$. ($a=-n$)

$\left(\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1\right)$.

Type II, $m=1$: Tilfellet II 1: $a^2 - 4b \geq 0$.

Tilfellet II 2: $a^2 - 4b < 0$.

Eksempel (II 1), se oppg. 9.3.3 c)

Beregn $I = \int \frac{2x-4}{x^2+6x+8}\,dx$. Ser lett at $x^2+6x+8 = (x+2)(x+4)$.

Strategien: Skrive $\frac{2x-4}{(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4}$. Ønsker $A, B$.

(Vi vil)

Felles nevner, og setter telleren lik på V.S. og H.S.

(V.S.) $2x-4 = A\cdot(x+4) + B(x+2)$ (H.S.)

Løser $2x-4 = Ax + 4\cdot A + Bx + 2B$.

$2x-4 = (A+B)x + 4A + 2B$.

Må ha: $A+B=2$, $4A+2B=-4$. eller $A+B=2 \rightsquigarrow B = 2-A$. Settes i $2A+B=-2$

Så $2A+2-A=-2$. Da er $A=-4$, $B=6$.

Vi får, at $I = \int \frac{2x-4}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{-4}{x+2}\,dx + \int \frac{6}{x+4}\,dx = -4\ln|x+2| + 6\ln|x+4| + C$.

$(= -\ln(x+2)^4 + \ln(x+4)^6 + C)$

Av algebraens fundamentalteorem (Kap. 3), vi har, at (5)

$$Q(x) = C_N (x-r_1)^{n_1} \cdots (x-r_p)^{n_p} (x^2+a_1x+b_1)^{m_1} \cdots (x^2+a_qx+b_q)^{m_q}.$$

$N = \text{grad } Q$ $\qquad n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q \in \mathbb{N}$ eller 0, $\qquad N = n_1 + \dots + n_p + m_1 + \dots + m_q$.

Eksempel (type I, $n>1$)

Beregn $I = \int \frac{2x+2}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$ $\quad (r_1=1, r_2=-2, p=2;\ n_1=1, n_2=2)$.

Strategien: Vi vil skrive $\frac{2x+2}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

Bringer til felles nevner, setter telleren HS = telleren V.S.

$$A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) = 2x+2.$$

$$A(x^2+4x+4) + B(x^2+2x-x-2) + Cx - C = 2x+2.$$

$x^2$: $A + B = 0$ (1). Gir $B = -A$. Setter inn i (2)

$x$: $4A + B + C = 2$ (2)

konstant: $4A - 2B - C = 2$ (3)

Får $4A - A + C = 2$, så $3A + C = 2$. Da er $C = 2-3A$. Setter inn i (3)

Får i (3): $4A - 2(-A) - (2-3A) = 2$.

$4A + 2A - 2 + 3A = 2$, så $A = \frac{4}{9}$, $B = -\frac{4}{9}$, $C = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

$$I = \int \frac{2x+2}{(x-1)(x+2)^2}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{4}{9}\ln|x-1| - \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot\frac{1}{(x+2)^{2-1}} + C_1$$

$$= \frac{4}{9}\ln|x-1| - \frac{4}{9}\ln|x+2| - \frac{2}{3(x+2)} + C_1.$$