MAT 1100 Forelesning 13 16/09/2024

Kapittel 6.3 Vekst av potenser, logaritmer og eksponentialer

Setning 6.3.15 (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0$ for alle $a, b > 0$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$ for alle $a, b > 0$.

Bevis: (b) $\frac{x^b}{e^{ax}} = \left(\frac{x}{e^{\frac{a}{b}x}}\right)^b$. Siden $b > 0$, nok å vise at

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(a/b)x}} = 0$. . Bruk L'Hôpitals ($\frac{\infty}{\infty}$)

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{a/b\,x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\frac{a}{b})e^{(a/b)x}} = 0$.

Setning 6.3.16 For alle $a, b > 0$, er $\lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0$.

Bevis: $x^a |\ln x|^b = (x^{a/b} \ln|x|)^b$. Nok at vise: $\lim_{x\to 0^+} x^{a/b} \ln x = 0$.

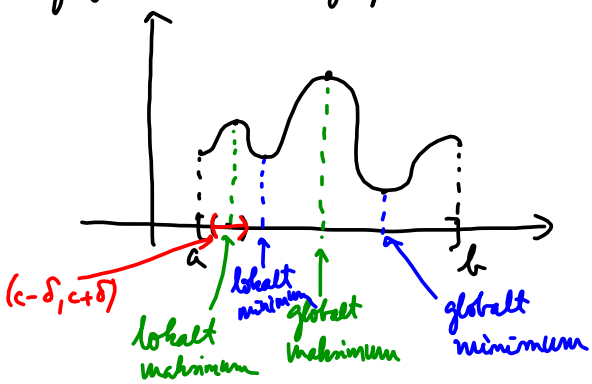
Ved L'H, $\lim_{x\to 0^+} (x^{a/b} \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a/b}}$

$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{a}{b} x^{-a/b} \cdot x^{-1}\right)}$

$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{b}{a} x^{a/b}\right) = 0$.

Kapittel 6.4
Kurvedrøfting

Gitt funksjon f på D_f, ser etter ekstremalpunkter, og formen til grafen (senere asymptoter).



Def 6.4.1 Anta f definert på D_f. Vi sier, at

(1) $c \in D_f$ er et lokalt maksimum dersom det finnes $\delta > 0$ så $f(x) \leq f(c)$ for $x \in D_f \cap (c-\delta, c+\delta)$

(2) $c \in D_f$ et et lokalt minimum dersom — " — $\delta > 0$ så $f(x) \geq f(c)$ for $x \in D_f \cap (c-\delta, c+\delta)$.

(3) $c \in D_f$ er globalt maksimum dersom $f(x) \leq f(c)$ for alle $x \in D_f$.

(4) $c \in D_f$ er globalt minimum dersom $f(x) \geq f(c)$ for alle $x \in D_f$.

Setning 6.4.2 Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i et punkt $c \in [a,b]$. Da er enten

(i) c er et endepunkt, a eller b.

(ii) $f'(c) = 0$

(iii) f er ikke deriverbar i c.

Slike punkter c kalles kritiske punkter.

Bevis: Om hverken (i) eller (iii) holder, da er $c \in (a,b)$ og f deriverbar i c.

Av Setning 6.2.1 er $f'(c) = 0$.

Eksempel $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ på $D_f = [\frac{1}{2}, 3]$. ③

Regner ut $f'(x) = (x^{-3})' - (x^{-1})'$

$= -3x^{-3-1} - (-x^{-1-1})$

$= -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

$= \frac{x^2-3}{x^4}$.

$f'(x) = 0$ hvis $x^2 - 3 = 0$ så $f'(\sqrt{3}) = 0$ med $\sqrt{3} \in (\frac{1}{2}, 3)$.

$\sqrt{3} \sim 1.7$.

	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		3
x^2-3		−	0	+	
x^4		+		+	
$f'(x)$		−	0	+	

f avtagende på $[\frac{1}{2}, \sqrt{3}]$

f voksende på $[\sqrt{3}, 3]$

Kritiske punkter: $\frac{1}{2}$, 3 og $\sqrt{3}$.

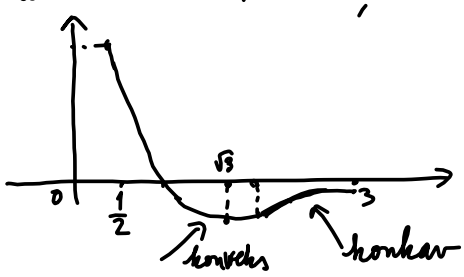
$f(\frac{1}{2}) = 2^3 - 2 = 6$, $f(3) = \frac{1}{27} - \frac{1}{3} = -\frac{8}{27}$, $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

$\frac{1}{2}$: lokalt maksimum,

3, $\sqrt{3}$: lokalt minimumspunkter;

$(\frac{8}{27} < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ fordi $\frac{4}{3} < \sqrt{3})$

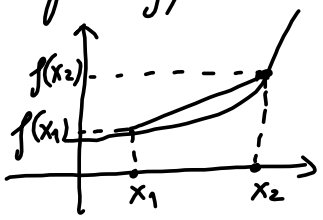
Så $f(\frac{1}{2}) > f(\sqrt{3})$, så $\sqrt{3}$ globalt minimum.



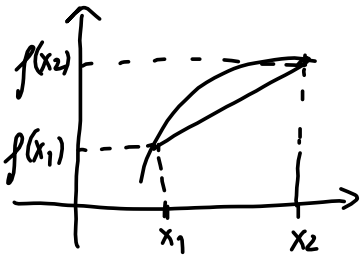
Konvekse og konkave funksjoner

Def 6.4.5 Gitt en funksjon f definert på D_f, I intervall innehold i D_f.

f **konveks** i intervallet I dersom for $x_1, x_2 \in I$ ligger sekanten gjennom $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ over (eller på) grafen til f.



f **konkav** i I dersom for $x_1, x_2 \in I$ ligger sekanten gjennom $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ under (eller på) grafen til f.



Nyttig verktøy:

Setning 6.4.7 Anta at f er kontinuerlig i et intervall I og $f''(x) \geq 0$ for alle indre punkter i I. Da er f konveks i I.

Dersom $f''(x) \leq 0$ for alle indre punkter i I er f konkav i I.

Bevis (lidt senere)

Tilbake til $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ på $[\frac{1}{2}, 3]$.

$f'(x) = \frac{x^2-3}{x^4}$. Har $f''(x) = \frac{(x^2-3)' \cdot x^4 - (x^2-3)\cdot(x^4)'}{(x^4)^2} = \frac{2x^5 - 4x^3(x^2-3)}{x^8}$ ($-4x^5 + 12x^3$)

(deler med x^3 i nevner og teller)

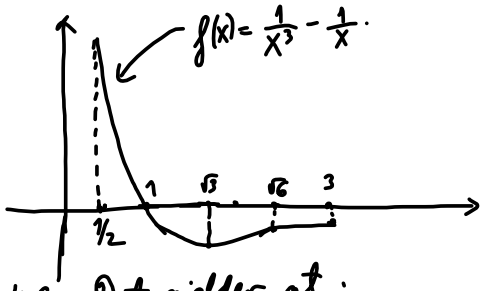
$$f''(x) = \frac{-2x^2+12}{x^5} = \frac{2(6-x^2)}{x^5}.$$ Ser at $f''(x) = 0$ i $\sqrt{6} \sim 2.44$, $\sqrt{6} \in [\frac{1}{2}, 3]$.

Ser at:

x	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3
$f'(x)$	- - -	0	———	
$f''(x)$	———		0	- - -

Så $f''(x) \geq 0$ på $[\frac{1}{2}, \sqrt{6})$ og $f''(x) \leq 0$ på $[\sqrt{6}, 3]$.

Da er f konveks på $[\frac{1}{2}, \sqrt{6}]$ og konkav på $[\sqrt{6}, 3]$.



$f(1)=0$
$f(\sqrt{3})\approx -0.385$
$f(\sqrt{6})\approx -0.34$
$f(3)\approx -0.296$

Lemma 6.4.6 Det gjelder, at:

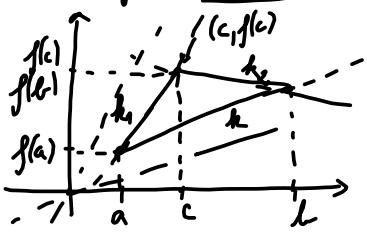
f er konveks i I hvis og bare hvis: for alle $a,b,c\in I$, $a<c<b$

er $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leq\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$. (1)

f er konkav i I hvis og bare hvis: for alle $a<c<b$ i I er

$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\geq\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$. (2)

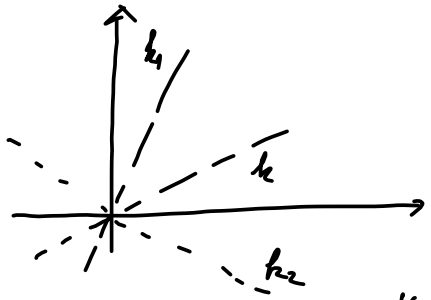
Bevis. Anta f er konkav. Vi har $a<c<b$ i I. Ønsker å vise (2).



$y=k(x-x_0)+y_0$ sekant gjennom $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$

$y=k_1(x-x_0)+y_0$ — " — $(a,f(a))$ og $(c,f(c))$

$y=k_2(x-x_0)+y_0$ — " — $(c,f(c))$ og $(b,f(b))$



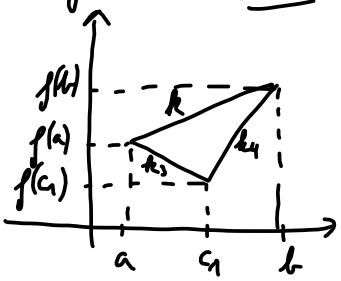
Vi ser, at $k_1\geq k$ og $k\geq k_2$

Men: $k_1=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k\geq\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=k_2$

Har vist: f konkav sikrer at (2) gjelder.

Nå ønsker vi det motsatte:

Anta at f ikke er konkav: vi har $a<c_1<b$ og $(c_1,f(c_1))$ ligger ikke over sekanten gjennom $(a,f(a))$, $(b,f(b))$. Så $(c_1,f(c_1))$ ligger under sekanten



Som før, ser vi at $k_2<k<k_1$ som gir:

$\frac{f(c_1)-f(a)}{c_1-a}<\frac{f(b)-f(c_1)}{b-c_1}$, som er det motsatte av (2)

Dette betyr at: om (2) gjelder, da er f konkav.

Bevis for setning 6.4.7, tilfellet: ⑥

$f''(x) \leq 0$ for alle indre punkter x i I.

Vi har $f'(x)$ avtagende.

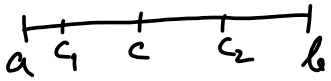
Velg $a < c < b$ indre punkter i I.

MVT (middelverdisetningen) gir: $c_1 \in (a,c)$: $f'(c_1) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

$c_2 \in (c,b)$: $f'(c_2) = \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$

da $c_1 < c_2$ er $f'(c_1) \geq f'(c_2)$

} Sol (2) holder for punktene $a < c < b$.

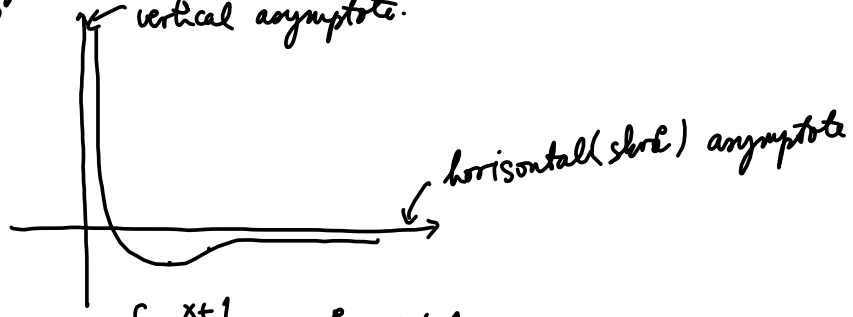


Kapittel 6.5 Asymptoter (7)

Eksempel: (1) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$, $D_f = (0, \infty)$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-x^2}{x^3} = +\infty \Rightarrow$ vertikal asymptote : y aksen

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Da er x-aksen en asymptote.



Eksempel 2:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{når } x \neq 1 \\ 3 & \text{når } x = 1. \end{cases}$$

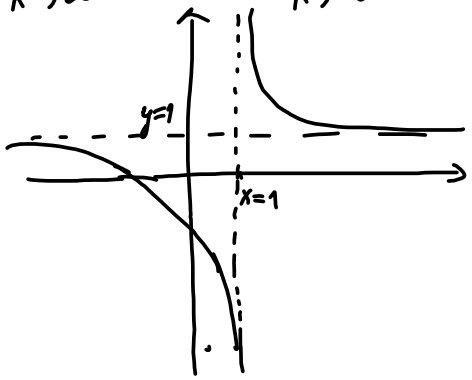
$D_f = \mathbb{R}$, f ikke kontinuerlig i $x = 1$.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ og $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$. $\Rightarrow$ Vi sier at:

$x = 1$ er vertikal asymptote nedenfra og ovenfra.

Ser: $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1}$ $\left(\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \right)$

$f(-1) = 0$



Oppskrift for å finne skrå asymptoter: (8)

ved eksempel: $f(x) = 2\sqrt{x^2-1} = 2(x^2-1)^{1/2}$, $D_f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$.

Trin 1) Beregner $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x^2-1} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

} ikke endelig. Gå til

Trin 2: Beregn $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{2 = a}}$ endelig.

Trinn 3 $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (2\sqrt{x^2-1} - 2x)$

$= 2 \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x}$ (Bruk $(r-s)(r+s) = r^2 - s^2$)

$= 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \boxed{0} = b$ endelig

Slutt: $y = ax+b$, eller $y = 2x$ er en skrå asymptote til f.