17/10/2024

MAT 1100 Forelesning 24

Kapittel 9.3 : Delbrøkoppspaltning

Forrige gang: (I) $\int \frac{D}{(x-r)^n}\,dx$, D konstant, $r\in\mathbb{R}$, $n\geq 1$.

(II) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)}\,dx$, hvor $a^2-4\cdot b\geq 0$ (så hvor x^2+ax+b har en reell faktorisering).

Ser nu på (II), tilfellet $\int \frac{B}{x^2+ax+b}\,dx$, og $a^2-4b<0$.

Løsningsteknikken: fullfører kvadratet i x^2+ax+b;
- lager substitusjon $u=g(x)$;
- får et integral på formen $\int \frac{B_1}{u^2+1}\,du$
- får $B_1\arctan(u)+C$, erstatt da u med $g(x)$.

Eksempler (fullfører kvadratet)

① Beregn $I=\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Sjekker at $2^2-4\cdot 2 = 4-8=-4<0$.
Derfor har x^2+2x+2 ikke noen reell faktorisering på formen $(x-r_1)(x-r_2)$, $r_1,r_2\in\mathbb{R}$.

x^2+2x+2 : ønsker på formen $(x+a_1)^2+b_1^2$.

$= x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$.

$I=\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$. Lager substitusjon: $u=x+1$, siden $(x+1)'=1$ er $du=dx$.

Har $I=\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u)+C = \arctan(x+1)+C$.

② Eksempel: $I=\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$. Sjekker at $2^2-4\cdot 6 = 4-24=-20$, så ingen reell faktorisering mulig.

Vi fullfører kvadratet: $x^2+2x+6 = x^2+2x+1+5 = (x+1)^2+5$.

$$I=\int \frac{dx}{(x+1)^2+5} = \int \frac{1}{5\left[\frac{1}{5}(x+1)^2+1\right]}\,dx$$

(faktorisering av konstanten i nevneren). $(ab)^2=a^2b^2$

$\frac{1}{5}(x+1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2(x+1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(x+1)\right)^2$

$\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$ $\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $a^2=\frac{1}{5}$, $b=x+1$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right]}\,dx$$

Substitusjon: $u=\frac{x+1}{\sqrt{5}}$, så $du=\frac{1}{\sqrt{5}}dx$. Men $I=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\,dx}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right]}$;

og med substitusjon: $I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(u)+C$.

Altså, $I=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)+C$.

Alternativt: $dx=\sqrt{5}\,du$, så
$I=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}\,du}{u^2+1}$
$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2+1}$.

17/10/2024

③ Eksempel.

$I = \int \frac{dx}{x^2+3x+6}$.

Sjekker, at $3^2 - 4\cdot 6 = 9 - 24 = -15$.
Ingen reell faktorisering.

Vi fullfører kvadratet i nevneren:

$x^2 + 3x + 6 = x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$(x+a_1)^2 = x^2 + 2xa_1 + a_1^2$
Med $a_1 = \frac{3}{2}$

$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 6 - \frac{9}{4}$

$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$ (ferdig med å fullføre kvadratet

$= \frac{15}{4}\left[\frac{4}{15}\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 1\right]$ (faktoriserer konstanten)

$= \frac{15}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 1\right]$

$= \frac{15}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$

$= \frac{15}{4}\left[\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1\right]$.

$I = \int \frac{dx}{x^2+3x+6} =$

$= \int \frac{1}{\frac{15}{4}\left[\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right]}dx = \frac{4}{15}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right]}dx.$

Substitusjon: $u = \frac{2x+3}{\sqrt{15}}$. Vi har, $\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{15}}$, og $du = \frac{2}{\sqrt{15}}dx$.

$I = \frac{2}{\sqrt{15}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan(u) + C.$

Så $I = \frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right) + C.$

Fullfører kvadratet: $x^2+ax+b = x^2 + 2\cdot\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$

$= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b-a^2}{4}$.

Så $\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4b-a^2}{4}} = \frac{1}{\frac{4b-a^2}{4}\left[\frac{4}{4b-a^2}\cdot\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right]}$.

$= \frac{4}{4b-a^2}\cdot\frac{1}{\left[\left(\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)^2+1\right]}$.

④ Eksempel (variant av 9.3.6)

$$I = \int \frac{3x+4}{x^2+2x+6}\,dx.$$

Har sjekket at x^2+2x+6 ikke har en reell faktorisering.

Deriver nevneren:

$$(x^2+2x+6)' = 2x+2.$$

Prøver å skrive: $3x+4 = A_1(2x+2) + B_1$.

$3x+4 = 2A_1x + 2A_1 + B_1$.

$2A_1 = 3$

og $2A_1 + B_1 = 4$. Får $B_1 = 1$, $A_1 = \frac{3}{2}$.

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+6}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+6}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+6}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+6) + \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

trenger ikke $|x^2+2x+6|$ siden x^2+2x+6 er alltid positiv.

Idéen:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\,dx$$ ③ $a^2-4b<0$

$$= \int \frac{A_1(x^2+ax+b)' + B_1}{x^2+ax+b}\,dx$$

$$= A_1\int \frac{(x^2+ax+b)'}{x^2+ax+b}\,dx + B_1\int \frac{1}{x^2+ax+b}\,dx.$$

$\int \frac{g(x)'}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$. $\arctan(\ldots)$.

⑤ Eksempel (4)

$I = \int \frac{5x^2-6x+2}{(x-1)(x^2-3x+5)}\,dx$. For x^2-3x+5, regner: $3^2-4\cdot 5 = 9-20 = -11 < 0$.
Så x^2-3x+5 har ingen reell faktorisering.

Graden til teller er 2 (strengt) mindre enn graden til nevneren ($=3$). Trenger ikke polynom divisjon.

Delbrøkoppspaltning: $\frac{5x^2-6x+2}{(x-1)(x^2-3x+5)} = \frac{D}{x-1} + \frac{Ax+B}{x^2-3x+5}$. (Husker A, B, D.)
($\cdot x^2-3x+5$, $\cdot x-1$)

Bringer til felles nevner på H.S., og setter telleren til H.S. = telleren til V.S.

$\Rightarrow$ H.S. $= D(x^2-3x+5) + (Ax+B)(x-1) = 5x^2-6x+2$ (fra V.S.).

$Dx^2-3Dx+5D+Ax^2-Ax+Bx-B = 5x^2-6x+2$.

$(D+A)x^2+(-3D-A+B)x+5D-B = 5x^2-6x+2$.

x^2:	$D+A$		$=5$		(1)
x:		$-3D-A+B$	$=$	-6	(2)
x^0:		$5D-B$	$=$	2	(3)

Av (1), er $A = 5-D$, av (3) er $B = 5D-2$. Setter disse i (2) og får

$-3D-(5-D)+5D-2 = -6$.

$-3D-5+D+5D-2 = -6$.

$3D = 1$, som gir $D = \frac{1}{3}$.

Så $A = 5-\frac{1}{3} = \frac{14}{3}$, $B = \frac{5}{3}-2 = -\frac{1}{3}$.

$$I = \int \frac{5x^2-6x+2}{(x-1)(x^2-3x+5)}\,dx = \underbrace{\int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\frac{14}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-3x+5}\,dx}_{I_2}$$

$I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| + C_1$, $I_2 = \frac{1}{3}\int \frac{14x-1}{x^2-3x+5}\,dx$.

(5)

$$I_2 = \frac{1}{3}\int \frac{14x-1}{x^2-3x+5}\,dx.$$

$(x^2-3x+5)' = 2x-3.$

Løser $14x-1 = A_1(2x-3)+B_1$, $14x-1 = 2A_1x - 3A_1 + B_1$.

$A_1 = 7$, $B_1 = 20$.

$$I_2 = \frac{1}{3}\int \frac{7(2x-3)}{x^2-3x+5}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{20}{x^2-3x+5}\,dx$$

$$= \frac{7}{3}\ln(x^2-3x+5) + \frac{20}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2-3x+5}}_{I_3}.$$

Vi fullfører kvadratet: $((x-c_1)^2 = x^2-2c_1x+c_1^2)$

$$x^2-3x+5 = x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+5-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

$$= \frac{11}{4}\left[\frac{4}{11}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right] \qquad \left(a=(\sqrt{a})^2\right).$$

$$= \frac{11}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2+1\right]$$

$$= \frac{11}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot x - \frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\frac{3}{2}\right)^2+1\right]$$

$$= \frac{11}{4}\left[\left(\frac{2x-3}{\sqrt{11}}\right)^2+1\right].$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2-3x+5} = \int \frac{1}{\frac{11}{4}\left[\left(\frac{2x-3}{\sqrt{11}}\right)^2+1\right]}\,dx$$

$$= \frac{4}{11}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-3}{\sqrt{11}}\right)^2+1}\,dx.$$

Setter $u = \frac{2x-3}{\sqrt{11}}$, så $du = \frac{2}{\sqrt{11}}dx$ og $dx = \frac{\sqrt{11}}{2}du$.

$$I_3 = \frac{4}{11}\int \frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan(u) + C_3.$$ I alt

$$I = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{3}\ln(x^2-3x+5) + \frac{20}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x-3}{\sqrt{11}}\right) + C.$$