MAT1100 Forelesning 14 ①

Oppsummering om asymptoter: f definert på D_f.

(I) Vertikale asymptoter ($x=C$, C reelt tall)

(II) Skråasymptoter: ($y=ax+b$, a, b reelle)

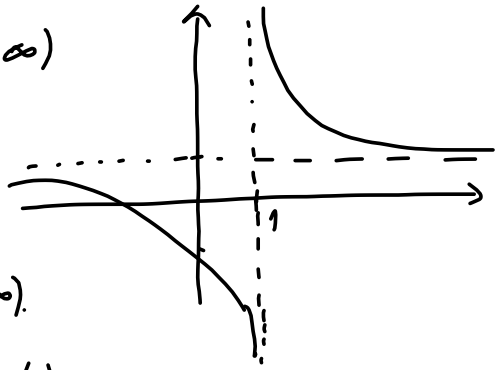
(I) (i) Dersom $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (eller $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$) sier vi at f har en vertikal asymptote når x går mot a ovenfra

(ii) Dersom $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (eller $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$) sier vi at f har en vertikal asymptote når x går mot a nedenfra.

Om begge asymptotene $\overset{\text{når}}{x\to a^+}$ og $x\to a^-$ finnes, har f en asymptote når x går mot a.

Eks: ① $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $D_f=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

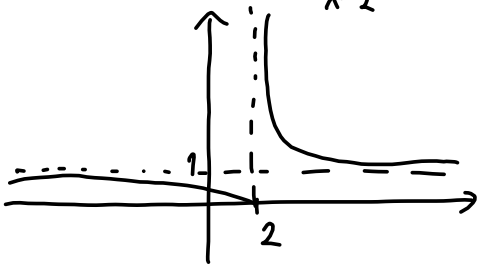


Eksempel 2: $g(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$, $D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

Når $x\to 2^+$ går $\frac{1}{x-2}$ mot $+\infty$ og $\lim_{x\to 2^+} g(x)=\infty$.

Når $x\to 2^-$ går $\frac{1}{x-2}$ mot $-\infty$ og $\lim_{x\to 2^-} g(x)=0$

↖ asymptote når x går mot 2 ovenfra



② II Linjen $y = ax+b$ er en skråasymptote til f når x går mot ∞ (eller $-\infty$) dersom:

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ (eller $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$). eller den er uendelig

Metode: (1) Beregn først $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Finnes den ikke, eller den er uendelig, ingen asymptote.

Om $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a$, a reelt tall, gå til:

(2) Beregn $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$. Finnes den ikke, eller den er uendelig, har f ingen asymptote.

Hvis $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = b$, da er $y = ax+b$ en asymptote når $x\to\infty$.

Eksempel: $f(x) = xe^{1/x}$ på $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}e^{1/x} = e^0 = 1 = a$.

(2) $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}(xe^{1/x}-x) = \lim_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$ $(\infty\cdot 0)$ uttrykk

$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}\cdot(1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to\infty}e^{1/x} = 1 = b$.

Da er $y = x+1$ en skråasymptote når $x\to\infty$.

Eksempel: $f(x) = 3x+\ln x$, $D_f = (0,\infty)$.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{\ln x}{x}\right) = 3 = a$.

(2) $\lim_{x\to\infty}(f(x)-3x) = \lim_{x\to\infty}(3x+\ln x-3x) = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$. Ikke endelig.

$\Rightarrow$ Ingen asymptote.

Hvordan begrunner vi at om vi finner a og ③ b fra metoden, så har vi en asymptote?

Metoden: $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$.

Da er $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b)) = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)-b = b-b=0$.

Definisjon av en skrå asymptote.

Antar nå at vi vet: $y=ax+b$ er en asymptote når $x\to\infty$.

Så $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$.

Er vi garantert at $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ (trinn 1) og at $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$? (trinn 2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)+(ax+b)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot(f(x)-(ax+b))}_{=0} + a + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}b}_{=0} = a.$$

Kapittel 7.1 Maksimum- og minimumproblemer (4)

Eksempel 7.1.1

L = lengde som skal omringe et $x \times y$ A .

Hvordan skal vi velge x og y slik at vi maksimere arealet A ?

For eksempel $L = 24$.

$A = xy$ skal maksimeres

Hvordan henger x og y sammen med L?

$2(x+y) = L$. Dermed er $y = \frac{L}{2} - x = 12 - x$. Sett inn i A,

og tenk på det som en størrelse der avhenger av x :

$A(x) = x(12-x)$. Ser etter ekstremalpunkter til $A(x)$.

$A'(x) = (-x^2 + 12x)' = -2x + 12$. Løser $A'(x) = 0$, får $x = 6$.

Har $x \in (0, L)$: $A(x)$ er voksende for $x \leq 6$ og avtar for $x \geq 6$.

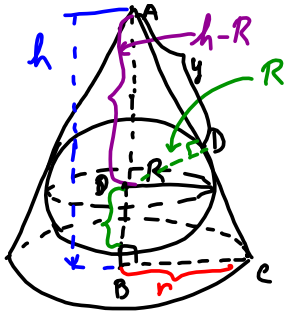
Da er $x = 6$ et maksimum for $A(x)$.

Får også $y = \frac{L}{2} - x = 12 - 6 = 6 = x$. Valget med maksimal $A(x)$

er kvadratet med $x = y = \frac{L}{4}$. (Det maksimale arealet er da $x \cdot y = 36$)

(5)

Eksempel:



$\Delta(ABC)$ og $\Delta(AOD)$ er formlike:

$$\frac{R}{y} = \frac{r}{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{hR}{y}}$$

R = radius til en kule

Tenker oss: en regulær kjegle som inneholder kulen.

Hva er minimumvolumet en slik kjegle kan ha?

Må ha: $2R < h$.

Vet: $V = \text{Vol} = \frac{\pi}{3} r^2 h$ (volum til kjeglen).

Skal prøve: skriv V som en funksjon av r (eller h), ved hjelp av R, som her så er en konstant. Se etter om V har et minimumspunkt.

Pythagoras i $\Delta(AOD)$: $R^2 + y^2 = (h-R)^2$. Dette gir: $R^2 + y^2 = h^2 - 2hR + R^2$

$$\Rightarrow y = \sqrt{h^2 - 2hR}.$$

Setter inn i uttrykk for r:

Får $r = hR \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$. Setter $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2 R^2}{h - 2R}$, forkortes

Har denne et minimum?

Regner ut $V'(h) = \frac{\pi}{3} R^2 \left(\frac{h^2}{h-2R}\right)'$

$$\frac{2h(h-2R) - h^2}{(h-2R)^2} = \frac{h^2 - 4hR}{(h-2R)^2}$$

Løser $V'(h) = 0$, derfor løser $h^2 - 4hR = 0$ og får $\boxed{h = 4R}$

$h = 4R$ er et minimum for $V(h)$, og dette minimumvolum blir da:

$$V(4R) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(4R)^2 \cdot R^2}{4R - 2R} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16R^4}{2R} = \frac{8\pi}{3} R^3 = 2 \cdot V(\text{kulen}).$$

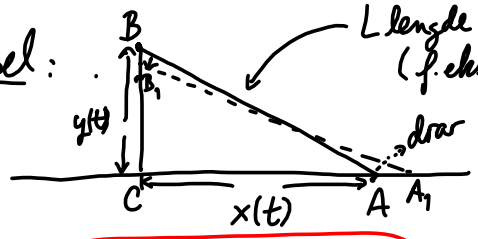
Koblede hastigheter

⑥

$x(t)$ = . størrelse som endrer seg i tiden t

$x'(t)$ = et uttrykk for hastigheten. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$.

Eksempel:



(f.eksempel en stige mot veggen BC)
drar den med en hastighet, vi kjenner den, v:
Hva er hastigheten for øverste punktet som "glir" nedover veggen?

En relasjon: $\boxed{(x(t))^2 + (y(t))^2 = L^2}$.

Interessert i: $x'(t)$, $y'(t)$. Typisk er bare en av disse gitt fra oppgaven, og vi skal finne den andre.

Trenger en relasjon mellom $x'(t)$, $y'(t)$.

Oftest lønner det seg å derivere med hensyn på t i den opprinnelige relasjon.

Her får vi: $2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$.

Hvis det er $x'(t)$ vi kjenner, da får vi $\boxed{y'(t) = -x'(t) \cdot \frac{x(t)}{y(t)}}$. Bruk, at $y(t) = \sqrt{L^2 - x(t)^2}$.

1) $L=5$, $x(t)=3$, $v = 8\,m/s = x'(t)$. Da er

$$y'(t) = -8 \cdot \frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}} = -8 \cdot \frac{3}{4} = -6\,m/s.$$

Toppen (punktet) glir nedover med 6 m/s.

2) $L=5$, $x(t)=4$, $x'(t)=2$. Da er

$$y'(t) = -2 \cdot \frac{4}{\sqrt{5^2-4^2}} = -\frac{8}{3}\,m/s$$ (glir nedover med $\frac{8}{3}$ m/s).