MAT 1100 Repetisjon 18/11/2024

Eksamensoppgaver

Oppg 5 / MAT1100 (2017).

a) $\int \cos(\sqrt{x})\,dx$. (Se forelesning av 15. oktober)

- Substitusjon $u = \sqrt{x}$ (Kap. 9.2)
- $u^2 = x$ og $\frac{dx}{du} = 2u$.
- $\int \cos(\sqrt{x})\,dx = \int 2u\cos(u)\,du \Big|_{u=g(x)} = 2\int u\cos(u)\,du \Big|_{u=g(x)}$, hvor $g(x) = \sqrt{x}$.

Ved delvis integrasjon har vi $\int u\cos(u)\,du = u\sin(u) + \cos(u) + C_1$.

I alt er $\int \cos(\sqrt{x})\,dx = 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C$, med C en konstant.

(Her skriver vi C i stedet for $2C_1$).

b) $\int \frac{1}{x^2+6x+18}\,dx$. Sjekker for reell faktorisering i nevneren.

$x^2+6x+18 = 0$ løses ved $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 18}}{2}$, men $6^2 - 4\cdot 18 < 0$, så $x^2+6x+18$ har ingen reell faktorisering.

Vi fullfører kvadratet i nevneren (siden graden til nevneren er 2 og telleren er en konstant):

$x^2+6x+18 = x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 + 9 = (x+3)^2 + 9$. Trenger: $\int \frac{du}{u^2+1}$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{1}{9\left[\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+1\right]}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+1}\,dx. \quad \circledast$$

Substitusjon: $u = \frac{x+3}{3}$ (eller $u = \frac{x}{3}+1$), som leder til $du = \frac{1}{3}dx$. Fortsetter i $\circledast$ og får

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{3}\arctan(u) + C = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+3}{3}\right) + C.$$

Oppg 5 | MAT 1100 (2017). 18/11/2024 (2)

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}\sin(e^x)$.

Vis, at $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ men at $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ ikke eksisterer.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x}\cdot \underbrace{\sin(e^x)}_{\in[-1,1]} = 0$$ siden $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ og $\left|\frac{1}{e^x}\sin(e^x)\right| \le \frac{1}{e^x}$, for alle $x \in \mathbb{R}$.

Har: $g'(x) = -e^{-x}\sin(e^x) + e^{-x}\cdot(\sin(e^x))'$ (produktregel for derivasjon)

$= -e^{-x}\sin(e^x) + e^{-x}\cdot e^x\cdot\cos(e^x)$ (kjerneregel — — —).

$= -e^{-x}\sin(e^x) + \cos(e^x)$

$= -g(x) + \cos(e^x)$. Siden $\cos(e^x)$ tar verdier mellom -1 og 1 for $x\to\infty$, finnes ikke $\lim_{x\to\infty}\cos(e^x)$. Derfor eksisterer heller ikke $\lim_{x\to\infty} g'(x)$. (Ellers, så vil $\lim_{x\to\infty}(g'(x) + g(x))$ eksistere, altså $\lim_{x\to\infty}\cos(e^x)$ vil eksistere.)

↗ Se 5.4.11, punkt (i) om sum av grenseverdier.

18/11/2024

Anta $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f', f'' eksisterer og f'' er kontinuerlig.

b) Gitt $b\in\mathbb{R}$, en konstant, la $h(x)=f(x)+f'(x)(b-x)$ og vis, at

$$h'(x)=f''(x)(b-x), \quad x\in\mathbb{R} \text{ vilkårlig.}$$

Sum og produktregel: $h'(x)=f'(x)+f''(x)(b-x)+f'(x)\cdot(-1)$ ← $=(b-x)'$

$=f''(x)(b-x)$. (1)

Vis, at for $a,b\in\mathbb{R}$, er:

$$\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx = f(b)-f(a)-f'(a)(b-a). \quad (2)$$

Bruk (1) og analysens fundamentalteorem:

$$\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx = \int_a^b h'(x)\,dx = h(b)-h(a) =$$

$$= f(b)+f'(b)\underbrace{(b-b)}_{=0}-f(a)-f'(a)(b-a) = (2).$$

c) Antar at det finnes $M>0$ så: $|f''(t)|\le M$ for alle $t\in\mathbb{R}$.

Vis, at for $b>a$ er:

$$\frac{1}{2}M(b-a)^2 \ge |f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)|. \quad (3)$$

(HS) i (2): $|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)| = \left|\int_a^b f''(x)(b-x)\,dx\right| \le$ ⊛

$$\le \int_a^b |f''(x)(b-x)|\,dx \quad \bullet$$

$=|f''(x)|\cdot|b-x|$

$=b-x$ for $a\le x\le b$.

For alle $x\in[a,b]$ er $|f''(x)|\cdot(b-x)\le M\cdot(b-x)$.

⊛⊛ Så tar vi integralet på begge sider

$$\bullet \le \int_a^b M\cdot(b-x)\,dx = M\cdot\frac{1}{2}\left(-(b-x)^2\right)\Big|_a^b = \frac{M}{2}\left(-\underbrace{(b-b)}_{=0}^2-\left(-(b-a)^2\right)\right)=\frac{M}{2}(b-a)^2$$

For at få ⊛ bruker vi, at ⊛⊛ gjelder: derfra får vi

$$\int_a^b |f''(x)|\cdot(b-x)\,dx \le \int_a^b M(b-x)\,dx.$$

⊛ Vi bruker, at $\left|\int_a^b u(x)\,dx\right| \le \int_a^b |u(x)|\,dx$, hvor $u:A\to\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

(med $u(x)=f''(x)(b-x)$.)

(Dette hvorfor, at vi har $-\int_a^b |u(x)|\,dx \le \int_a^b u(x)\,dx \le \int_a^b |u(x)|\,dx$ (siden $|s|\le K$ kommer av $-K\le s\le K$, $K>0$ konstant;

Men $-|u(x)|\le u(x)$ for $x\in[a,b]$

så $\int_a^b (-|u(x)|)\,dx \le \int_a^b u(x)\,dx$

og $u(x)\le |u(x)|$ for alle x

så $\int_a^b u(x)\,dx \le \int_a^b |u(x)|\,dx$.

$(-|s|\le s\le |s|$ for s reelt$)$.

c) 18/11/2024 (4)

Har rett:

for $a<b$: $|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)| \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$. (4).

Forklar, at: $|f(b)-f(a)| \geq \left(|f'(a)| - \frac{1}{2}M(b-a)\right)\cdot(b-a)$. (5)

Den vanlige trekantsulikhet er: $|r-s| \leq |r|+|s|$. Vi trenger ulikheten den motsatte vei: $||r|-|s|| \leq |r-s|$ (Kapittel 2.)

La $r = f(b)-f(a)$, $s = f'(a)(b-a)$.

H.S.i(4): $\frac{M}{2}(b-a)^2 \geq |r-s| \geq ||r|-|s|| = \left||f(b)-f(a)| - |f'(a)|\cdot(b-a)\right|$. Så

$$-\frac{M}{2}(b-a)^2 \leq |f(b)-f(a)| - |f'(a)|(b-a) \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$$

$|f'(a)|(b-a) - \frac{M}{2}(b-a)^2 \leq |f(b)-f(a)|$ som gir (5). Slutt på (c). Vi ser på (d) i morgen.

Oppg 2 / MAT1110 (2024) 18/11/2024 (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

a) Finn konvergensområdet.

For $x \in \mathbb{R}$, ser på $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ (gitt) som $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{x^n}{n+2}$.

Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+3} \cdot \frac{n+2}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} \cdot |x| = |x|.$$

Når $|x|<1$ får vi konvergens. For $|x|>1$ altså $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ divergere.

Sjekker endepunktene: i $x=-1$ får vi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$, som konvergerer ved testen for alternerende rekker.

I $x=1$ får vi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergerer.

Konv. området er $[-1,1)$.

b) Finn et uttrykk for summen av potensrekken.

La $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$, $s: [-1,1) \to \mathbb{R}$.

Ved derivasjon, får vi ledd på formen $\left(\frac{x^n}{n+2}\right)' = \frac{n x^{n-1}}{n+2}$, og det er ikke enklere.

Vi ønsker dette skal være $n+2$.

Vi ganger med x^2 på begge sider:

$x^2 s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$. Deriverer nå: $(x^2 s(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n+2}$,

så $(x^2 s(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x + x^2 + x^3 + \ldots = x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\text{geometriske rekke. med sum } \frac{1}{1-x} \text{ for } |x|<1}$

Vi har: $(x^2 s(x))' = \frac{x}{1-x}$ for $x \in (-1,1)$.

$$\Rightarrow x^2 s(x) = \int \frac{x}{1-x}\,dx + C = \int \frac{x-1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx + C$$

$$= \int (-1)\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx + C = -x - \ln|1-x| + C.$$

for $x \in (-1,1)$

Har $s(0) = \frac{1}{2}$, setter $x=0$: $0 \cdot \frac{1}{2} = 0 + C$, så $C=0$.

Når $x \neq 0$ er $s(x) = \frac{1}{x^2}\left(-x - \ln|1-x|\right)$.

$s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

Får

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} - \frac{\ln|1-x|}{x^2}, & x \neq 0, \ |x|<1. \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$