MAT 1100 Repetisjon 19/11/2024

Oppg 4/ MAT 1110 (2019)

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$. Finn konvergensområdet og et uttrykk for summen.

(a) Gitt $x \in \mathbb{R}$, ser på forholdstesten på tallrekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$. $= a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x-1)^{2(n+1)+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-1)^{2n+1}} = (x-1)^2 \cdot \frac{n}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(|(x-1)^2| \cdot \frac{n}{n+1} \right) = |x-1|^2$. Rekken konvergerer når $|x-1|^2 < 1$, hvilket er det samme som $|x-1| < 1$, og den divergerer når $|x-1| > 1$.

Blir: $-1 < x-1 < 1$, som oppfylles for $x \in (0,2)$. Sjekker endepunktene: $x = 2$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{n} = \sum \frac{1}{n}, \text{ som divergerer.}$$

For $x = 0$ vi får $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)\cdot(-1)^{2n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, som divergerer. ($(-1)^{2n} = 1$)

Konvergensområdet er $(0,2)$.

Skal finne et uttrykk for $s(x)$: leddene er $\frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$, som ved derivasjon vil bli $\frac{(2n+1)\cdot(x-1)^{2n}}{n}$, som ikke kan nemt forenkles. Vi ser på

$$\frac{(x-1)^{2n+1}}{n} = \frac{(x-1)^{2n}(x-1)}{n}$$

→ vil derivere dette leddet

Vi deler med $x-1$ på begge sider hvor vi definerer $s(x)$.

19/11/2024

For $x \neq 1$:

$$\frac{s(x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n}$$. Vi deriverer, får

$$\left(\frac{s(x)}{x-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\cdot(x-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(x-1)^{2n-1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{2n-1} \quad . \quad = 2\left[(x-1) + (x-1)^3 + (x-1)^5 + \dots\right]$$

$$= 2(x-1)\left[1 + (x-1)^2 + \left((x-1)^2\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y = (x-1)^2.$$ Geometrisk rekke

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{2(n-1)+1}$$

$$= 2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left[(x-1)^2\right]^{n-1} = 2(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(x-1)^2\right]^n$$

$$= 2(x-1)\cdot\frac{1}{1-(x-1)^2} = \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}, \quad x \in (0,2).$$

Får herfra: $\frac{s(x)}{x-1} = \int \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}\,dx$. Substitusjon $u = (x-1)^2$, så

$du = 2(x-1)dx$ og $\frac{s(x)}{x-1} = \int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u| + C = -\ln|1-(x-1)^2| + C.$

Ganger med $(x-1)$ på begge sider:

$s(x) = -(x-1)\ln|1-(x-1)^2| + C(x-1)$ Dette gjelder på intervallet $(0,2)$, da begge funksjoner er kontinuerlige.

$\lim_{x\to 1} \frac{s(x)}{x-1} = -\ln|1-(1-1)^2| + C = C$, men $\lim_{x\to 1} \frac{s(x)}{x-1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1} s'(x$

Så $C = 0$, da er $s(x) = -(x-1)\ln|1-(x-1)^2|$ på $(0,2)$ $= 0$.

19/11/2024.

Oppg 3 | MAT 1110 (2017)

a) Avgjør konv. eller divergens for $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{n}$.

Prøver testen for alternerende rekker: rekken konvergerer dersom $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{n}\right| = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ og $\left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\}$ er avtagende.

Fra kap. 6.3 er $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0$ for $a, b > 0$. (l'Hopital).

Så $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n} = 0$ og rekken konvergerer.

b) Finn summen av $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$.

Den kommer fra potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$. Sett $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ (1)

Ønsker $s\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Forholdstesten: $\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right| = |x|\cdot\frac{n+1}{n+2} \longrightarrow |x|$ når $n\to\infty$.

Konvergensområdet er $(-1,1)$, ved testing er også -1 med.

Ganger med x i (1): $xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ← samme

Vi deriverer: $(xs(x))' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$.

geometrisk rekke

Da er $xs(x) = \int\frac{1}{1-x}\,dx + C = -\ln|1-x| + C$.

For $x=0$ får vi $0\cdot s(0) = \underbrace{-\ln|1-0|}_{=0} + C$, altså $C=0$.

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{\ln|1-x|}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Setter $x=\frac{\pi}{4}\in(-1,1)$, og får

$$\sum\frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}} = \frac{1}{4}s\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\pi}\ln\left|1-\frac{\pi}{4}\right| = -\frac{\ln\left|1-\frac{\pi}{4}\right|}{\pi}.$$

Oppg 2 / MAT1100 (2022) 19/11/2024 (3)

a) $\int \ln(x^7)\,dx = \int 1\cdot \ln(x^7)\,dx$, $u(x)=\ln(x^7)$, $v'(x)=1$

$u'(x) = 7x^6\cdot\frac{1}{x^7} = \frac{7}{x}$, $v(x)=x$

delvis integrasjon

$= x\ln(x^7) - \int \frac{7}{x}\cdot x\,dx = x\ln(x^7) - 7\int 1\cdot dx = x\ln(x^7) - 7x + C$.

b) $\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$. Delbrøksoppspalting:

$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$. Felles nevner: den på

$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{(Ax+B)(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$. Setter tellerene på V.S. lik med H.S.

$1 = Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2$. Vi må ha: $(A+C)x^2+(A+B)x+B = 1$

$A+C=0$, $A+B=0$, $B=1$

Da er $A=-1$, $C=1$. Så $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$.

$\int \frac{dx}{x^2(x+1)} = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1}$

$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C$

$= \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C$.

19/11/2024 (5)

Oppg 1 / MATINF 2023 (Del 1)

Finn $T_2 f$, $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ om $a = -1$.

$$(T_2 f)(x) = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) + \frac{f''(-1)}{2!}(x-(-1))^2$$

$$= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2}(x+1)^2.$$

$$f(-1) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = ((1-x^3)^{-1})' = (-1)\cdot(-3x^2)\cdot(1-x^3)^{-2} = 3x^2(1-x^3)^{-2}$$

$$f''(x) = 3\cdot 2x(1-x^3)^{-2} + 3x^2\cdot[(-2)\cdot(-3x^2)\cdot(1-x^3)^{-3}]$$

$$= 6x(1-x^3)^{-2} + 18x^4(1-x^3)^{-3}.$$

Så $f'(-1) = 3\cdot(-1)^2\cdot(1-(-1))^{-2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$.

$$f''(-1) = 6\cdot(-1)\cdot(1-(-1))^{-2} + 18\cdot(-1)^4(1-(-1))^{-3} = -\frac{6}{4} + \frac{18}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$(T_2 f)(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{8}(x+1)^2.$$

19/11/2024

Oppg 6 | MATINF 2023 (Del 1).

Løs $y' - 3y = 2xe^x$, $y(0)=0$.

Førsteordens lineær likning: $y' + f(x)y = g(x)$.

$f(x) = -3$.

Velger $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$: $F(x) = -3x$.

Løsningen (uten initialbetingelse) er

$$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right) = e^{3x}\left(\underbrace{\int e^{-3x}\cdot 2xe^x\,dx}_{I.} + C\right) \quad (\#)$$

$I = \int 2xe^{-2x}\,dx = 2\int xe^{-2x}\,dx$. Bruker delvis integrasjon

$u(x) = x$, $v'(x) = e^{-2x}$

$u'(x) = 1$, $v(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}$

$$= 2\left[\frac{-xe^{-2x}}{2} - \int 1\cdot\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx\right]$$

$$= -xe^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx = -xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2}.$$ Setter inn i (#).

$$y(x) = e^{3x}\left(-xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} + C\right) = -xe^x - \frac{e^x}{2} + Ce^{3x}$$

$y(0)=0$ gir $0 = \underbrace{-0\cdot e^0}_{=0} \underbrace{- \frac{e^0}{2}}_{-\frac{1}{2}} + C\cdot e^0$ så $C = \frac{1}{2}$.

Løsningen:
$y(x) = -xe^x - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{3x}}{2}$
(Kap. 10.2)

Alternativt: Kap 10.3 (setning 10.3.2): $c=0$, $d=0$ ($y(0)=0$).

$$y(x) = e^{-\int_0^x f(t)\,dt}\left(\int_0^x g(t)e^{\int_0^t f(s)\,ds}\,dt + 0\right)$$ (0 = d)

$$= \ldots = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}.$$

19/11/2024

Oppg 5 / MAT1100 (2018)

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(u) + C$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C.$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - \sin x}\,dx$ (Kap 9.6)

Vi prøver grensesammenligning med $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$, $p > 1$ (konverger).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2-\sin x}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{x^2 - \sin x}$$. For $p=2$ blir dette

$$\overset{p=2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - \sin x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}\sin x} = 1 < \infty$$. Får konvergens.

$\left|\frac{1}{x^2}\sin x\right| \le \frac{1}{x^2}$ så $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\sin x = 0$