MAT 1100 Forelesning 25 21/10/2024

Kap. 9.3 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Antar, etter polynomdivisjon, at grad $P(x)$ er $<$ grad $Q(x)$.

Reduserer til: delbrøkoppspalting av $\frac{P(x)}{Q(x)}$ i ledd

på formen (I) $\frac{C_1}{x-r_1}, \frac{C_2}{(x-r_1)^2}, \dots, \frac{C_{n_1}}{(x-r_1)^{n_1}}$, tilsvarende for $(x-r_2)^{n_2}, \dots, (x-r_p)^{n_p}$,

1-grad faktorer i $Q(x)$

(II) $\frac{A_1x+B_1}{x^2+a_1x+b_1}, \frac{A_2x+B_2}{(x^2+a_1x+b_1)^2}, \dots, \frac{A_{m_1}x+B_{m_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{m_1}}$, tilsvarende for

resterende 2-grads faktorer i $Q(x)$.

Rekursjonsformel:

$I_m = \int \frac{du}{(1+u^2)^m}$, $m \geq 1$. Det kan vises, at:

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1} \text{ for alle } m \geq 2.$$

Eksempel $I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+6)^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right]^2}$ fra forelesning 24.

Setter $u = \frac{x+1}{\sqrt{5}}$, da er $du = \frac{1}{\sqrt{5}}dx$ og $dx = \sqrt{5}du$.

$$I = \frac{\sqrt{5}}{25}\underbrace{\int \frac{du}{(u^2+1)^2}}_{=I_2} = \frac{\sqrt{5}}{25}\left[\frac{1}{2(2-1)} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2(2-1)} \cdot I_1\right]$$

. Setter inn for $u$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+6)^2} = \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{x+1}{\sqrt{5}}}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)} + \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+6} + \frac{\sqrt{5}}{50} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

Kap. 9.5 Uegentlige integraler 24/10/2024

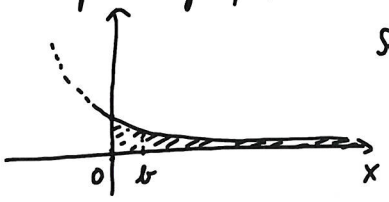
Til nå: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f$ kontinuerlig, $[a,b]$ begrenset.

Da er $f$ begrenset, og $\int_a^b f(x)dx$ er et (endelig) tall.

Nå ser vi på: (I) $f$ er definert på et ubegrenset intervall

(II) $f$ definert på $(a,b]$, $[a,b)$, eller på $(a,b)$ bortsett fra et indre punkt.

(I) Eksempel: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$.




Ser på $[a,b]$, for alle $b$, tar lim når $b\to\infty$.

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b \quad \text{av analysens fundamentalteorem}$$

$$= -e^{-b}-(-e^0) = 1-e^{-b}.$$

Ser, at $\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1-0 = 1$, som er endelig.

**Definisjon 9.5.1** (i) Anta at $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig.

Dersom det finnes et tall $L$ slik at $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = L$, så sier vi at $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergerer. Vi skriver i så fall

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = L.$$

I motsatt fall sier vi at $\int_a^\infty f(x)dx$ divergerer.

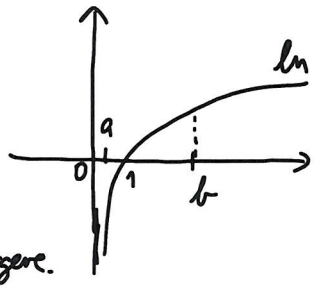
(ii) Tilsvarende, om $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$ er et endelig tall, sier vi at $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ konvergerer. I motsatt fall sier vi at $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ divergerer.

24/10/2024

Ser på $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p$ reellt.

**Setning** Integralet $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ konvergerer hvis $p > 1$

og divergerer når $p \leq 1$.




**Bevis:** For $p = 1$: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

For $b \in [1, \infty)$, $\int_1^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$.

$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$. Da vil $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergere.

For $p \neq 1$: $\int \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C$.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} \overset{\text{⊛}}{=} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Tilfellet $p > 1$: $\lim_{b\to\infty} b^{1-p} = 0$

Tilfellet $p < 1$: $\lim_{b\to\infty} b^{1-p} = \infty$.

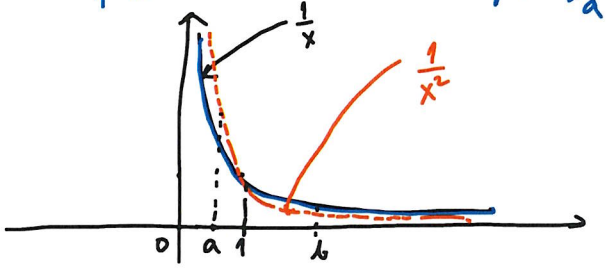
**Når $p > 1$** vil $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ konvergere. Faktisk er $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

Tilsvarende med ⊛:

For $0 < a < \infty$, er $\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}$. Så $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ konvergerer og vi skriver: $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$.

Når $p < 1$ vil $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ divergere. Samme for $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, $0 < a < \infty$.

$p = 1$, $p = 2$.



21/10/2024

Forsiktig: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Vi kan ikke forvente, at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx$.

Om både $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ og $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer, kan vi

si at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

II) Def 9.5.6

(i) Anta $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig. Vi sier, at $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergerer dersom $\lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)\,dx$ eksisterer (er et tall). Vi skriver da

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)\,dx.$$

(ii) Anta $g:(a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig. Vi sier, at $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerer dersom $\lim_{y\to a^+}\int_y^b g(x)\,dx$ eksisterer (er et tall), og da skriver vi

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b g(x)\,dx.$$

For (i) og (ii), dersom grensene ikke eksisterer eller eksisterer og er lik $\infty$ eller $-\infty$, sier vi at $\int_a^b f(x)\,dx$ ( $\int_a^b g(x)\,dx$ ) divergerer.

Setning 9.5.8

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergerer når $p<1$ og divergerer for $p\geq 1$.

Bevis: $p=1$: $\int_y^1 \frac{dx}{x} = [\ln x]\Big|_y^1 = \ln 1 - \ln y = -\ln y$, så $\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{y\to 0^+}\ln y = \infty$.

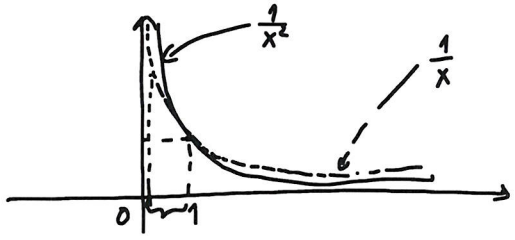
Så $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergerer.

$p\neq 1$: $\int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]\Big|_y^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{y^{1-p}}{1-p}$. For $p>1$ er $1-p<0$, og

$$\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{1}{1-p} - \frac{y^{1-p}}{1-p}\right] = \frac{1}{1-p} - \underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1-p}\cdot y^{1-p}}_{=\infty} = \infty.$$

For $p<1$, er $1-p>0$, så er $\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} - 0 = \frac{1}{1-p}$.

Da vil $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergere med grense $\frac{1}{1-p}$.




21/10/2024 (5)

Sammenligningskriterier

9.5.11 $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, kontinuerlige, $f, g$ er positive ($f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ for alle $x \geq a$), og $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a, \infty)$. (sterk antakelse)

($g(x)$ gitt sammenligner med $f(x)$)

(i) Hvis $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergerer, så vil $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergere.

(ii) Hvis $\int_a^\infty g(x)dx$ divergerer, vil $\int_a^\infty f(x)dx$ divergere.

($f(x)$ gitt, sammenligner med $g(x)$)

Eksempel: for (i): $g(x) = \frac{1}{x^4+1}$ ; Er $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent? (For $a > 1$)

$g(x) = \frac{1}{x^4+1} < \frac{1}{x^4} = f(x)$, $\int_a^\infty \frac{dx}{x^4}$ konvergerer så $\int_a^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ konvergerer.

(ii) $\int_2^\infty \frac{x}{x^2-1}dx$. For $x \geq 2$ er $x^2 \geq x^2 - 1 > 1$.

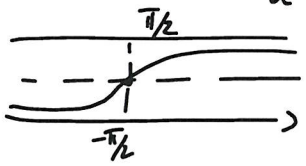
Men $\frac{x}{x^2-1} > \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ og $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ divergerer. Derfor vil $\int_2^\infty \frac{x}{x^2-1}dx$ divergere.

9.5.13 Grenseverdisammenligning Gitt $g, f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, kontinuerlige og positive.

(i) Hvis $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty$, da vil $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergere.

(ii) Hvis $\int_a^\infty f(x)dx$ divergerer og $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0$, så vil $\int_a^\infty g(x)dx$ divergere.

Eksempel: (ii) $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ positiv.




Hva med $\int_0^\infty g(x)dx$?

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$, $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$

Så vil $\int_1^\infty g(x)dx$ divergere (av 9.5.13 (ii)). Da $g(x) \geq 0$ for $x \geq 0$ vil også $\int_0^\infty g(x)dx$ være divergent.