MAT 1100 Forelesning 26 22/10/2024

Kapittel 10.1 Førsteordens, lineære differensialligninger

Ved dette menes det en ligning på formen

(1) $y' + f(x)y = g(x)$,

hvor det ukjente er $y = y(x)$, en funksjon av $x$, og funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er kjent, og er definert på et åpent intervall (kan være hele $\mathbb{R}$).

førsteordens: den deriverte $y'$ til $y$ inngår

lineære: ikke kvadratiske ledd

Spørsmål: (i) Er det noen løsninger til (1)?

(ii) Hvor mange løsninger finnes det?

(iii) Hvordan finner vi løsningene?

Eksempel: ① $y' - 3y = 0$. Her er $f(x) = -3$, en konstant funksjon, definert på hele $\mathbb{R}$. Videre er $g(x) = 0$, for alle $x$. (Ligningen er homogen).

Vi prøver å se om $y = e^{3x}$ er en løsning:

$y' = 3e^{3x}$ og $y' - 3y = 3e^{3x} - 3 \cdot e^{3x} = 0$.

Ser også at $y = \frac{1}{2}e^{3x}$ oppfyller: $y' = \frac{3}{2}e^{3x}$ og

$y' - 3y = \frac{3}{2}e^{3x} - 3 \cdot \frac{1}{2}e^{3x} = 0$.

Sjekk dette!

Faktisk en $Ce^{3x}$, med $C$ en konstant, alltid en løsning! Vi har uendelig mange løsninger. For å beskrive en generell metode for å finne løsninger, merk at: vi kan la $F(x) = -3x$ være en antiderivert til $f(x)$, så $e^{3x} = e^{-F(x)}$. Kanskje ~~ting~~ inngår $e^{-F(x)}$ i løsningen?

22/10/2024 (2)

**Definisjon 10.1.1**
For $I$ et åpent intervall (kan være $\mathbb{R}$) og $f(x), g(x)$ definert på hele $I$, kalles $y$ en løsning til

(1) $y' + f(x)y = g(x)$,

dersom $y$ er en funksjon definert på hele $I$, $y$ er deriverbar på $I$, og (1) gjelder i alle $x$ fra intervallet $I$, altså $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ for alle $x \in I$.

**Setning 10.1.3** Antar at $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige på et åpent intervall $I$, og la $F$ være en antiderivert til $f$ på $I$. Løsningene til differensialligningen (1) er gitt som

(2) $y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)$, hvor $C$ er en konstant.

**Bevis:** (A) Må sjekke at enhver $y$ fra på formen i (2) oppfyller (1).

(B) Om vi har en løsning $y$, må den være som i (2). Vi viser dette først. Anta at $y$ er en løsning til diff. ligningen (1).

La $F$ være en antiderivert til $f$. Vi multiplisere $e^{F(x)}$ i V.S og H.S. i (1)

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x), \quad \text{for alle } x \in I.$$

Siden $F'(x) = f(x)$, $x \in I$, er dette, ved produktregel for derivasjon, på formen:

$$\left(e^{F(x)}y\right)' = e^{F(x)}g(x), \quad x \in I.$$

↑ Kalles en integrerende faktor.

Da er $e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)\,dx + C$, hvor $C$ er en konstant.

Vi dividerer begge sider med $e^{F(x)}$ og får at

$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)\,dx + C\right)$, for $C$ en konstant. (B) er vist.

22/10/202

Vi viser (A): Vi antar nå at F er en antiderivert til f.

La $\overbrace{y}^{=y(x)} = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)$, C en konstant.

Da er $y' = (e^{-F(x)})' \cdot \left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right) + e^{-F(x)} \cdot \left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)'$

$= (-F'(x)e^{-F(x)})\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right) + e^{-F(x)}\left(\underbrace{\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx\right)'}_{= e^{F(x)} g(x)} + \underbrace{C'}_{=0}\right)$

$= (-f(x)e^{-F(x)})\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right) + g(x)$

$= -f(x)y + g(x), \quad x \in I.$

Så $y' + f(x)y = g(x)$ i hvert $x \in I$. ∎

Eksempel: (Oppg. 10.1.4). Ser på $\boxed{y' + 2y = xe^x.}$

(a) Vis, at $y = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x + 2e^{-2x}$ er en løsning.

Sjekker: $y' = \frac{1}{3}(1 \cdot e^x + x \cdot e^x) - \frac{1}{9}e^x + 2 \cdot (-2)e^{-2x} = \frac{2}{9}e^x + \frac{1}{3}xe^x - 4e^{-2x}$

$y' + 2y = \frac{2}{9}e^x + \frac{1}{3}xe^x - 4e^{-2x} + 2 \cdot \frac{1}{3}xe^x - 2 \cdot \frac{1}{9}e^x + 2 \cdot 2e^{-2x} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)xe^x = xe^x,$

gir 0 gir 0

(b) Bruker (2) for å finne alle løsningene.

$f(x) = 2$, $g(x) = xe^x$. Vi tar $F(x) = 2x$. Av (2) får vi, at en løsning y har form $y = e^{-2x}\left(\int e^{2x} \cdot xe^x\,dx + C\right) = e^{-2x} \cdot \underbrace{\int xe^{3x}\,dx}_{v' = e^{3x} = \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'} + Ce^{-2x}$. (*)

$\int xe^{3x}\,dx = \int x \cdot \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'dx \qquad u = x,\ u' = 1,\ v = \frac{e^{3x}}{3}$

$= x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx$

$= \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + c.$ Setter inn i (*).

Får $y = e^{-2x} \cdot \frac{xe^{3x}}{3} - e^{-2x} \cdot \frac{1}{9}e^{3x} + Ce^{-2x} = \frac{xe^x}{3} - \frac{e^x}{9} + Ce^{-2x}$, C er en konstant.

22/10/2024.
(9)

Eksempel (variant av 10.1.5)

Løs $y' + \frac{1}{x}y = \cos x$ på $(0, \infty)$

Her: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \cos x$

Tar: $F(x) = \ln x$.

Bruker fremgangsmåten fra beviset for (B): $e^{F(x)}$

$e^{F(x)} = e^{\ln x} = x$, for alle $x \in (0, \infty)$. Multipliser i ligningen:

får $xy' + x \cdot \frac{1}{x}y = x\cos x$,

som er $xy' + 1 \cdot y = x\cos x$, eller $(xy)' = x\cos x$.

Da er $xy$ en antiderivert til $x\cos x$, så $xy = \int x\cos x\,dx + C$

Fra eksempel (forelesning 22): $xy = x\sin x + \cos x + C$, for alle $x \in (0, \infty)$.

Deler på $x$ på begge sider: $\boxed{y = \sin x + \frac{1}{x}\cos x + \frac{C}{x}, \quad x \in (0, \infty)}$

Mere generelle ligninger:

Oppg 10.1.2c Ser på ligningen $y'' + y' - 6y = 0$. Er $y = e^{2x}$ en løsning?

Sjekker: $y' = 2e^{2x}$, $y'' = 4e^{2x}$ og $y'' + y' - 6y = 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6 \cdot e^{2x} = 0$.

Svaret: Ja. gjelder for alle $x$.

## Kap. 10.2 Anvendelser

22/10/2024 (5)

**Eksempel 10.2.1**

Dyrepopulasjon (f.eks. gjeldrev): ved starttidspunkt er dette: $P$.

Vekstrate: $r$.

Spørsmål: hva er populasjonsstørrelsen etter $t$ år? $(t>0)$.

Hvordan omdannes dette til en 1ste ordens, lineær diff. ligning?

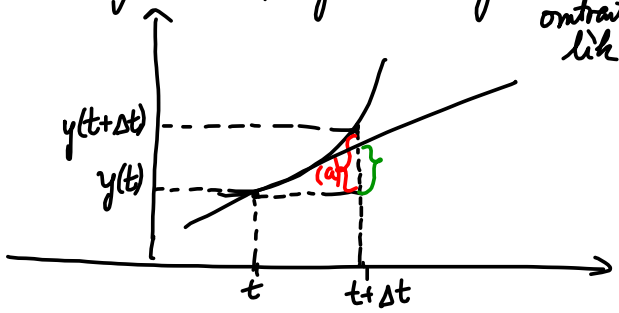
La $y(t)$ = populasjonsstørrelsen ved tiden $t$.

Økning fra tiden $t$ i intervallet $\Delta t$

vekst: $y(t+\Delta t) - y(t)$ (a)

vekstraten: tolkes som en økning per tidsenhet: $ry(t)$. Dette gir en alternativ måte å se på vekst som $ry(t)\Delta t$.

For $\Delta t$ veldig liten er $y(t+\Delta t)-y(t) \sim ry(t)\Delta t$. Her deler på $\Delta t$, omtrent lik




$$\text{for } \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \approx ry(t)$$

La $\Delta t \to 0$. Får

$$y'(t) = ry(t).$$

Diff.ligning: $\boxed{y' - ry = 0}$

Så løsningene er: $y(t) = Ce^{rt}$, $C$ konstant.

Tolker $P$ som $y(0)$, og da er $P = C\cdot e^0 = C$.

I alt, er populasjonsstørrelsen beskrevet ved $\boxed{y(t) = Pe^{rt}}$.

22/10/2024

Eks 10.2.2
Storby, befolkningstall: $B$. Tilskudd ved → vekstrate $r$ (lokalt)
→ innflytting med rate $Ne^{at}$ vekst per år.

Hva er befolkningstallet etter $t$ år? ($t>0$). $= y(t)$.

Vet: $y(0) = B$.

Økning beskrives som: $y(t+\Delta t) - y(t)$
over tid $\Delta t$

og som: $ry(t)\Delta t + Ne^{at}\Delta t$

For $\Delta t$ liten: $y(t+\Delta t) - y(t) \sim r y(t)\Delta t + Ne^{at}\Delta t$.

Som forrige eksempel: $y'(t) = ry(t) + Ne^{at}$

Ligning: (**) $y' - ry = Ne^{at}$, $t>0$, $y(0) = B$.

Løser ved metoden: $f(t) = -r$, $g(t) = Ne^{at}$, la $F(t) = -rt$, multipliser da med $e^{F(t)}$ i (**). Får

$$e^{-rt}y' - re^{-rt}y = Ne^{(a-r)t}$$

Dette er $(e^{-rt}y)' = Ne^{(a-r)t}$, så $e^{-rt}y = \int Ne^{(a-r)t}dt + C$.

Tilfellet $a=r$: Får $y(t) = e^{rt}(B+tN)$.

Tilfellet $a \neq r$: Får $y(t) = \frac{N}{a-r}e^{at} + \left(B - \frac{N}{a-r}\right)e^{rt}$.

$e^{-rt}y = \int N dt + C = N\cdot\int t'dt + C = Nt + C$, så

$y = e^{rt}(Nt + C)$.