MAT 1100 Forelesning 16 23/09/2024

Kapittel 7.5

Cotangens funksjonen: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, definert for alle reelle x slik at $\sin x \neq 0$, så for alle $x \neq k\pi$, k et heltall.
(x skal ikke være et heltalls multiplum av π.)

Siden $\sin x$ og $\cos x$ er kontinuerlige, blir $\cot$ kontinuerlig på dens definisjonsområde $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Den er også deriverbar, med $\cot' x = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ (*)

$= -1 - \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = -(1 + \cot^2 x)$. Skriver: $D[\cot x] = -(1+\cot^2 x)$.

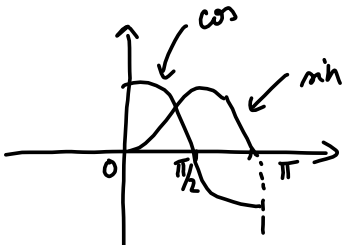
Også: (fra *) $D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Ser litt framover: $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + C$, C konstant.

Siden $D[\cot x] < 0$ for alle x i definisjonsområdet er $\cot x$ avtagende.

$(\cot x)'' = (-(\sin x)^{-2})' = -\left((-2)\cdot(\sin x)^{-2-1}\right)\cdot(\sin x)'$

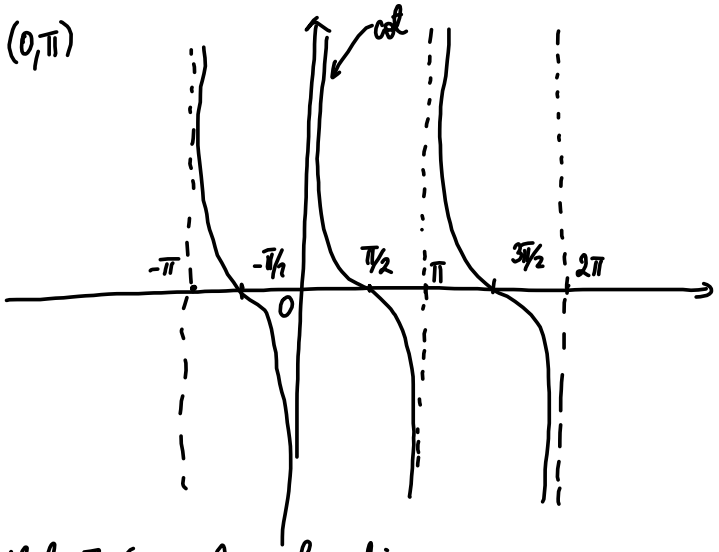
$= 2\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$. Ser på $x \in (0, \pi)$



$(\cot x)'' > 0$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $(\cot x)'' = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$, $(\cot x)'' < 0$ for $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

$\cot x$ konvekst. $\cot x$ konkav.

cot x : på $(0, \pi)$



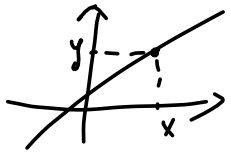
②

Kapittel 7.6 Arcusfunksjonene

Kort fortalt, disse er omvendte funksjoner til sin, cos, tan, cot.
Skal sjekke først hvor vi får injektive funksjoner.

Minner om (fra kapittel 7.4): gitt $f: D_f \to \mathbb{R}$, vi sier at
f injektiv dersom: til ethvert $y \in V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ finnes det bare et $x \in D_f$ med $y = f(x)$.

Eksempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x+5$. For $y \in \mathbb{R} = V_f$, har $y = 3x+5$ bare en løsning $x = \frac{y-5}{3}$.

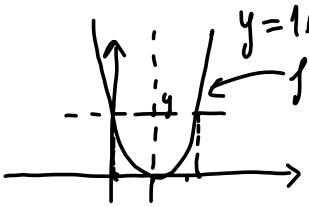


Ikke-injektiv: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = (x-2)^2$

$D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [0, \infty)$.

For $y \geq 0$, $y = (x-2)^2$ har 2 løsninger når $y > 0$.

$y = 16 = (x-2)^2$ har løsninger $x_1 = -2$ og $x_2 = 6$.

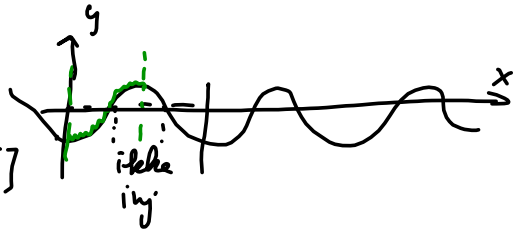


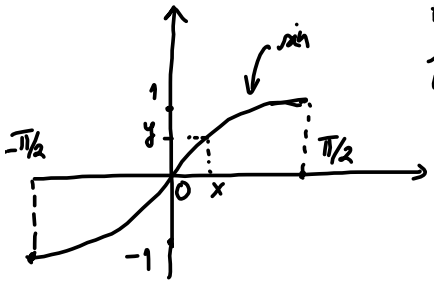
Om man velger mindre definisjonsområde kan vi få en injektiv funksjon: $D_f = [2, \infty)$.

Arcsin: den omvendte funksjonen til sin

③

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

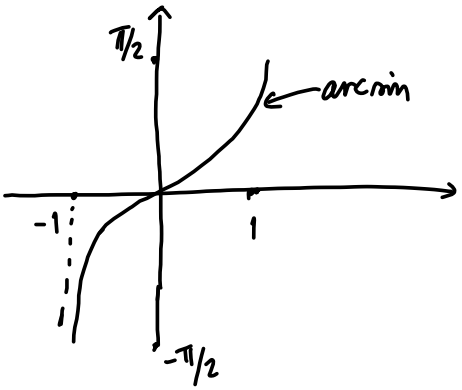


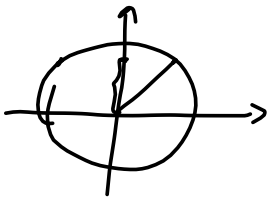


For $y \in [-1,1]$ finnes det kun ett $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ s.a. $\sin x = y$.

Vi kan definere den omvendte funksjonen, som vi kaller arcsin, med

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$





Ser på injektiv $f: D_f \to V_f$ og $f^{-1}: V_f \to D_f$, vet at for $y \in V_f$ har vi bare ett x med $y = f(x)$ og $f^{-1}(y) = x$. Så:

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)).$$ Viktig: for $y \in V_f$ er $f(f^{-1}(y)) = y$.

For sin og arcsin får vi: **for alle $x \in [-1,1]$ er $\sin(\arcsin x) = x$.**

På den annen måten: **$\arcsin(\sin x) = x$ hvis $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.** For eksempel $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$.

Men $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$, som er i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

For $x \in \mathbb{R}$: $\arcsin(\sin x) = y$ gitt ved $\sin y = \sin x$ og $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(4)

Ønsker å finne $D[\arcsin x]$, eller $(\arcsin x)'$.

Bruker: Theorem 7.4.6 som sa: hvis f er kontinuerlig, strengt monoton og deriverbar i $x \in D_f$, med $f'(x) \neq 0$, så er den omvendte funksjonen $g = f^{-1}$ deriverbar i $y = f(x)$ og

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Tar $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$, strengt voksende, kont. og deriverbar i alle x, med $f'(x) \neq 0$ for $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

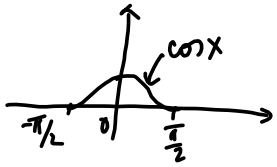
La $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la $\underbrace{y}_{\text{variabel}} = f(x) = \sin x$. Ønsker å finne $D[\arcsin y]$.

$$\rightarrow D[\arcsin y] = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}$$

. Skriver om $\cos x$ ved hjelp av y.

Vet $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, så $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}$

Men



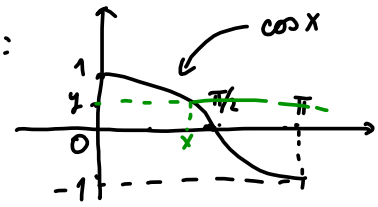
$\cos x > 0$ for $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

I alt, er $D[\arcsin y] = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

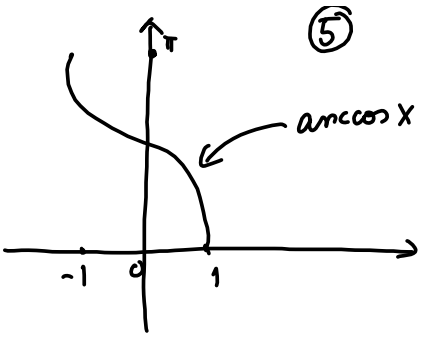
Bytter bokstav fra y til x: $\boxed{D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Deretter: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$, C konstant.

Arccos:



⑤



$f: [0,\pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$

for et $y \in [-1,1]$ finnes det presist et $x \in [0,\pi]$ med $y = \cos x$.

Man har, at $\boxed{D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

$\cos(\arccos x) = x$ for alle $x \in [-1,1]$

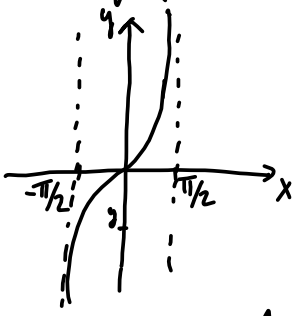
$\arccos(\cos x) = x$ for alle $x \in [0,\pi]$

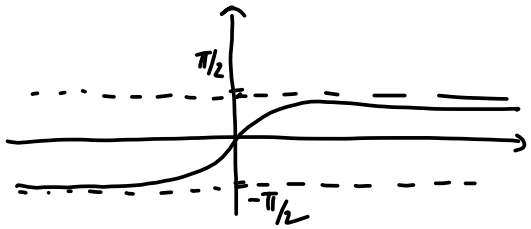
($\arccos(\cos x) = y$ hvor $\cos y = \cos x$ og $y \in [0,\pi]$).

Arctan $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$

strengt voksende

Den omvendte funksjonen: $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.





$D[\arctan y] = \frac{1}{(\tan x)'}$, hvor $\boxed{y = \tan x}$ (*), $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$= 1 + (\tan x)^2$$

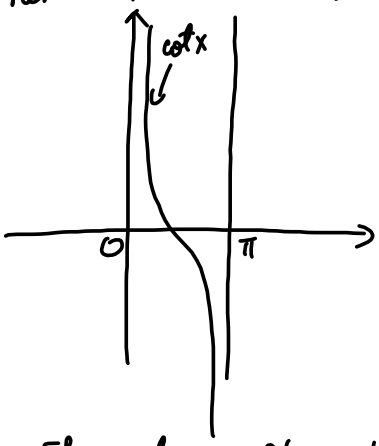
$$= 1 + y^2 \quad \text{på grunn av (*)}$$

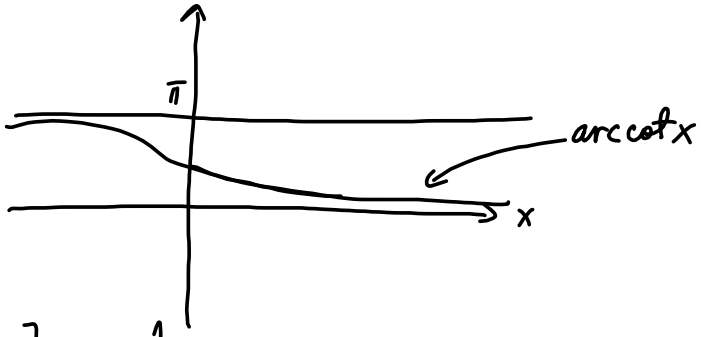
Vi får $\boxed{D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}}$ (etter vi flytter variabelnavn).

(6)

$f:(0,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$

Før den omvendte funksjon $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$





$$D[\operatorname{arccot} x] = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Eksempel: $f(x) = e^{4x} \arctan x^2$. Finn $f'(x)$

$$f'(x) = (e^{4x})' \arctan x^2 + e^{4x} \cdot (\arctan x^2)'$$

$$= 4e^{4x} \arctan x^2 + e^{4x} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)'$$

$$= 2e^{4x}\left(2\arctan x^2 + \frac{x}{1+x^4}\right).$$