MAT 1100 Forelesning 17

24/09/2024

①

For arctan:

$$\begin{cases} \tan(\arctan x) = x & \text{for alle } x \in \mathbb{R}. \\ \arctan(\tan x) = x & \text{for } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

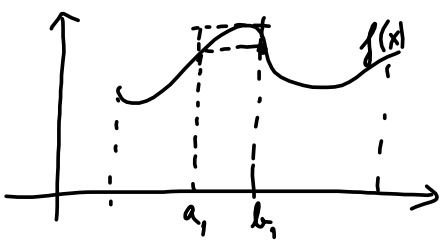
arccot:

$$\begin{cases} \cot(\operatorname{arccot} x) = x & \text{for alle } x \in \mathbb{R}. \\ \operatorname{arccot}(\cot x) = x & \text{for } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

8.2 Definisjon av integralet

: finner tilnærminger til "areal" under en graf.

- bruker rektangler innenfra og ovenfra grafen til funksjonen.



(2)

Noe terminologi:

f definert på $[a,b]$, $a<b$. Vi definerer følgende:

Partisjon av $[a,b]$:



en endelig mengde

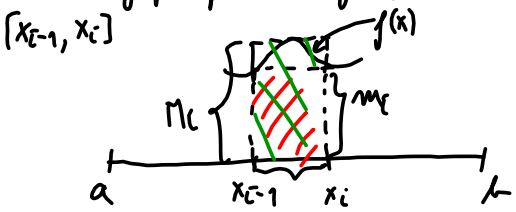
$$\Pi = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

stort "pi"

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$;

$[a,b]$ = unionen av intervallene.

For å hjelpe forklaringen, vi kommer til å anta $f(x) \geq 0$, f begrenset.



$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ → areal $m_i(x_i - x_{i-1})$

$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ → areal $M_i(x_i - x_{i-1})$.

Sett opp: den øvre trappesum for partisjonen Π:

$$\Phi(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

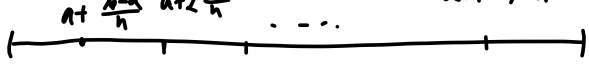
den nedre trappesum

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

} Klart, at $N(\Pi) \leq \Phi(\Pi)$, for en vilkårlig partisjon Π.

{ integralet til f?

Eksempel på partisjon:



Velg $n \geq 1$: n like store biter

$\therefore$ intervall: lengde $\frac{b-a}{n}$

Definerer det øvre integralet, betegnet $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, som $\inf\{\Phi(\Pi) \mid \Pi$ partisjon av $[a,b]\}$.

det nedre integralet, betegnet $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, som $\sup\{N(\Pi) \mid \Pi$ partisjon av $[a,b]\}$.

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$? $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

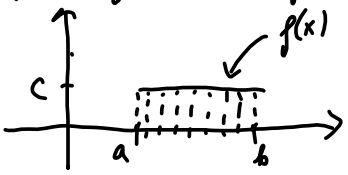
$N(\Pi)$ $\Phi(\Pi)$

Definisjon For $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ begrenset, vi sier at f er integrerbar over $[a,b]$ hvis

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

I så fall defineres integralet til f: $\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Eksempel: $f(x)=c$, c positiv konstant, $x\in[a,b]$



Gir oss $T=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ en partisjon av $[a,b]$.

$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$.

For $[x_{i-1},x_i]$, er $m_i=c=M_i$.

$$\phi(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) = c(x_1-x_0)+c(x_2-x_1)+c(x_3-x_2)+\dots+c(x_{n-1}-x_{n-2})+c(x_n-x_{n-1})$$

$$= c(x_1-\underbrace{x_0+x_2}_{=0}-x_1+x_3-x_2+\dots+\underbrace{x_{n-1}-x_{n-2}+x_n}_{=0}-x_{n-1})$$

$$= c(x_n-x_0)=c(b-a),\ \text{en konstant, avhenger ikke av } T.$$

Klart at $N(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=c(b-a)$. — " —

Da er $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Derfor er f integrabel og $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

Eksempel: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{når } x \text{ er rasjonal}\\ 0 & \text{når } x \text{ er irrasjonal.}\end{cases}$$

Velg $T=\{x_0=0<x_1<x_2<\dots<x_n=1\}$ partisjon.

På hvert $[x_{i-1},x_i]$ er $m_i=0$ og $M_i=1$.

$$\phi(T)=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i-x_{i-1}) = x_n-x_0=1-0=1,\quad N(T)=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i-x_{i-1})=0.$$

$a=0, b=1$ $\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=1$; f ikke integrerbar.

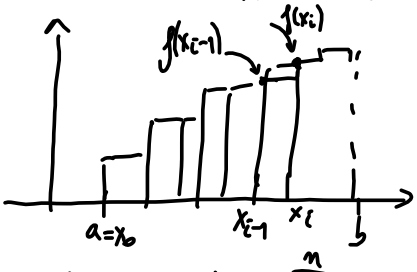
④

Setning 8.2.3
Hvis f er monoton på et intervall $[a,b]$, da er f integrerbar.

Ideen i beviset: Anta f voksende: for $x<y$ i $[a,b]$ er $f(x) \le f(y)$.

Gir oss $T = \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$.

Hvert $[x_{i-1}, x_i]$ har lengde $\frac{b-a}{n}$, og vi har n slike med intervaller.



$m_i = f(x_{i-1})$
$M_i = f(x_i)$

$$\phi(T) - N(T) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n) - f(x_0) - f(x_1) - \dots - f(x_{n-1}) \right]$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Velger vi partisjoner med fler og fler punkter (kan voksende), lengde $\frac{b-a}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} (\phi(T) - N(T)) = 0.$$

Man kan utlede: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Eksempel $\int_0^b x^3\,dx$ (5)

$\boxed{a=0}$ $b>0$ Gitt n, sett på Π hvor $[x_{i-1}, x_i]$ har lengde $\frac{b}{n}$.

$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n} = i\cdot\frac{b}{n}$ i likhs

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n} i^3\cdot\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{b}{n}$$

$$= b^4\cdot\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

Oppg. 1.2:3 ved induksjon er $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

$$= \frac{b^4}{4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n^4} = \frac{b^4}{4}.$$

Sjekker også $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^4}{4}$.

$\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}$.

8.3 Analysens fundamentalteorem ⑥

- Knytter sammen integrasjon og derivasjon.
- Gir verktøy til å beregne integraler.

Terminologi: Gitt f definert på $[a,b]$, vi sier en funksjon F er en antiderivert til f hvis

(1) $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$.

(2) F er kontinuerlig i a og b.

Lemma Anta at F og G er antiderivert til f på $[a,b]$, da finnes det C konstant slik at $F(x) = G(x) + C$, alle $x \in [a,b]$.

Trenger følgende: Hvis $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar med $g'(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$, da er g en konstant funksjon.

Hvorfor? Tar x i $[a,b]$, $x \neq a$. Middelverdisetningen for g på $[a,x]$ gir et $c \in (a,x)$: $g'(c) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, Men $g'(c) = 0$ så $g(x) = g(a)$. Da x var vilkårlig valgt, er

$g(x) = g(a)$ for alle $x \in [a,b]$

Bevis for lemma: Vet at $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$

og $G'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$

Da er $(F-G)'(x) = 0$, for hvert x. Fra lemmaet, $F(x) - G(x) = C$, med C en konstant.

8.3.3 Analysens fundamentalteorem

Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a,x]$, hvor $a \leq x \leq b$ og funksjon F gitt som

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

er en antiderivert til f på $[a,b]$.

⑦