MAT 1100 Forelesning 28 28/10/2024

Kapittel 10.5 Annenordens, homogene ligninger med konstante koeffisienter

En generell annenordens differensialligning er på formen:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x),$$

hvor $p(x)$, $q(x)$, $h(x)$ kjente funksjoner på $\mathbb{R}$, og y skal så bestemmes.

annenorden: både y' og y'' inngår i ligningen.

ligningen kalles homogen dersom $h(x) = 0$ i alle $x \in \mathbb{R}$.

– 4 — med konstante koeffisienter dersom $p(x)$ og $q(x)$ er konstanter funksjoner. Med andre ord, $p(x) = p$, $p \in \mathbb{R}$, for alle $x \in \mathbb{R}$

og $q(x) = q$, $q \in \mathbb{R}$, for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi ser på ligning på formen:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

En løsning til (1) er en funksjon $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \text{ for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Første liten resultat: Lemma 10.5.1

Anta at y_1 og y_2 er to funksjoner som er løsninger til (1).

Da er $y(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

også en løsning for alle valg av konstanter C og D.

Bevis: ~~Siden~~ Vi vet at $y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x) = 0$ $\overset{\text{alle}}{\forall} x \in \mathbb{R}$

og $y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x) = 0$, alle $x \in \mathbb{R}$, så

har vi: først, $y'(x) = Cy_1'(x) + Dy_2'(x)$, dernest $y''(x) = Cy_1''(x) + Dy_2''(x)$, og til slutt: $y''(x) + py'(x) + qy(x) = Cy_1''(x) + Dy_2''(x) + pCy_1'(x) + pDy_2'(x) + qCy_1(x) + qDy_2(x)$

$= C(y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)) + D(y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)) = C \cdot 0 + D \cdot 0$

$= 0$. Dette gjelder i hvert $x \in \mathbb{R}$. ∎

Førsteordens homogen ligning med konstant koeffisient 28/10/2024 (2)

$y' + by = 0$, b konstant.

Fra kap. 10.1 (bruke en integrerende faktor) vet vi at

løsningene er: $y(x) = Ce^{-bx}$, C konstant.

Vi prøver med løsninger på formen eksponensialfunksjoner også for (1): $y'' + py' + qy = 0$.

Sett $y = e^{rx}$ for at denne skal være en løsning, trenger vi r reelt.

$$\underbrace{(e^{rx})''}_{=(re^{rx})' = r^2e^{rx}} + p\underbrace{(e^{rx})'}_{=re^{rx}} + qe^{rx} = 0, \text{ for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Vi trenger da, at $r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$, alle $x \in \mathbb{R}$.

Eller $(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$, alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi ser, at vi trenger $\boxed{r^2 + pr + q = 0}$ Her er p, q kjent. Løser for r.

Kalles den karakteristiske ligning til $y'' + py' + qy = 0$.

→ Tre tilfeller:

- → Det finnes to reelle røtter
- → — " — èn reell rot
- → Det finnes to komplekse røtter

28/10/2024 (3)

Tilfellet: den karakteristiske ligningen har 2 reelle røtter.

(1) $y'' + py' + qy = 0$: ligningen

(2) $r^2 + pr + q = 0$: den karakteristiske ligningen

Vet: $p^2 - 4q > 0$. Har 2 røtter til (2), r_1 og r_2, legge reelle.
Av det forrige regnestykke er både $e^{r_1 x}$ og $e^{r_2 x}$ løsninger til (1)
Ar lemma 10.5.1 er $y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$ alltid en løsning til (1),
for vilkårlige valg av konstanter C og D.

Eks: $r_1 = 7$, $r_2 = -3$.

$$(r - r_1)(r - r_2) = r^2 - r(r_1 + r_2) + r_1 r_2 = r^2 - r(7 - 3) + (-3) \cdot 7$$
$$= r^2 - 4r - 21$$

Ligningen $y'' - 4y' - 21y = 0$ har løsninger $y = Ce^{-3x} + De^{7x}$.

Eksempel: $y'' - y' - 90y = 0$. Bruk metoden.

Den karakteristiske ligningen er: $r^2 - r - 90 = 0$, med

løsninger $r_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-90)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{1 \pm 19}{2} \begin{matrix} 10 \\ -9 \end{matrix}$.

$r_1 = -9$, $r_2 = 10$. Har løsninger $y = Ce^{-9x} + De^{10x}$.

Setning 10.5.3 Anta at den karakteristiske ligningen til

(1) $y'' + py' + qy = 0$

har to reelle røtter r_1 og r_2. Da er alle løsninger på formen

3) $y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$, hvor C og D er vilkårlige konstanter.

28/10/2024

10.5.4 Setning (Eksistens og entydighet av løsninger) (4)

Anta at den karakteristiske ligningen $r^2+pr+q=0$ til

1) $y''+py'+qy=0$

har to reelle røtter. La c, d og b være frit valgte i $\mathbb{R}$.

Det finnes nøyaktig èn løsning av (1) slik at

$y(c)=d$ og $y'(c)=b$.

Hvor kommer dette av? I løsningen $y=Ce^{r_1x}+De^{r_2x}$ setter vi $x=c$ og samme i $y'(x)$.

$y(c)=Ce^{r_1c}+De^{r_2c}=d$ (ønsker)

$\rightarrow y'(x)=Cr_1e^{r_1x}+Dr_2e^{r_2x}$ så $Cr_1e^{r_1c}+Dr_2e^{r_2c}=b$ $\quad|\cdot(-r_2)$

Tilsammen: $Ce^{r_1c}+De^{r_2c}=d$ $\quad|\cdot(-r_1)$

Kjenner r_1, r_2, c, d, b, finn da C og D.

$D(r_2-r_1)e^{r_2c}=b-r_1d$, $\quad D=\frac{b-r_1d}{r_2-r_1}\cdot e^{-r_2c}$

$C(r_1-r_2)e^{r_1c}=d-br_2$, $\quad C=\frac{d-br_2}{r_1-r_2}\cdot e^{-r_1c}$

$\square$

Eksempel Finn den løsningen til $y'' - y' - 12y = 0$ slik at $y(0) = -\frac{1}{3}$ og $y'(0) = -6$. (Her $c = 0$, $d = -\frac{1}{3}$, $b = -6$)

Karakteristisk ligning er: $r^2 - r - 12 = 0$.

Løser: $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 4 \\ r_2 = -3. \end{cases}$

Løsninger: $y = Ce^{-3x} + De^{4x}$, C, D konstanter.

$y'(x) = -3Ce^{-3x} + 4De^{4x}$

Vi får ligningene: $y(0) = -\frac{1}{3}$ eller $C + D = -\frac{1}{3}$ } Herfra $C = -D - \frac{1}{3}$

$y'(0) = -6$ eller $-3C + 4D = -6$ } Setter inn:

$-3\left(-D - \frac{1}{3}\right) + 4D = -6$, så $7D = -7$ og $D = -1$.

Da er $C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Svaret er: $y(x) = \frac{2}{3}e^{-3x} - e^{4x}$.

Bevis for 10.5.3 Antar at $r^2 + pr + q = 0$ har 2 reelle røtter r_1 og r_2. Så $r^2 + pr + q = (r - r_1)(r - r_2)$

$= r^2 - r(r_1 + r_2) + r_1 r_2$.

Får relasjon: $p = -(r_1 + r_2)$.

Anta at y er en løsning til $y'' + py' + qy = 0$.

Setter $u = \frac{y}{e^{r_1 x}}$. Da er $y = ue^{r_1 x}$. Finner:

$y' = u'e^{r_1 x} + ur_1 e^{r_1 x}$ (produktregel for derivasjon),

$y'' = (u'e^{r_1 x})' + (ur_1 e^{r_1 x})'$

$= u''e^{r_1 x} + u'r_1 e^{r_1 x} + u'r_1 e^{r_1 x} + ur_1^2 e^{r_1 x} = u''e^{r_1 x} + 2u'r_1 e^{r_1 x} + ur_1^2 e^{r_1 x}$

Sett inn i (1):

$0 = y'' + py' + qy = u''e^{r_1 x} + 2u'r_1 e^{r_1 x} + ur_1^2 e^{r_1 x} + pu'e^{r_1 x} + pur_1 e^{r_1 x} + que^{r_1 x}$

$0 = u''e^{r_1 x} + u'(2r_1 + p)e^{r_1 x} + (r_1^2 + pr_1 + q) \cdot ue^{r_1 x}$

$= 0$ siden r_1 er ~~løsning~~ rot i den karakteristiske ligning.

Får $u'' + (2r_1 + p)u' = 0$. Setter $z = u'$.

Da er $z' + (2r_1 + p)z = 0$.

- $z = Ke^{-(2r_1 + p)x}$, K konstant.
- $u = \int z(x)\,dx + C = \boxed{-\frac{K}{2r_1 + p}}_{D} e^{-(2r_1 + p)x} + C$.
- $y = e^{r_1 x} \cdot u =$ ønsket, fordi $r_1 - (2r_1 + p) = -r_1 - p = r_2$.

∎

28/10/2024

(6)

Tilfelle: én reell rot.

Eksempel: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Karakteristisk ligning: $r^2 + 4r + 4 = 0$.

$(r+2)^2 = 0$ $\quad (u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$

én rot: $r = -2$

Da vet vi at $y_1 = e^{-2x}$ er en løsning. (eller velg $y_1 = Ce^{-2x}$)

Setter ny: $y_2 = xe^{-2x}$. Er den løsning?

$y_2' = e^{-2x} + x \cdot (-2e^{-2x}) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$

$y_2'' = -2e^{-2x} - 2(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x}$

$y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x} + 4(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 4xe^{-2x}$

$= 0$.

Generelt: $y = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}$ for bare én reell rot r_1, C, D konstanter.

løsningene er