MAT1100 Forelesning 19 30/09/2024

Analysens fundamentalteorem:

Gitt $f: I \to \mathbb{R}$ kontinuerlig på et intervall I, så er funksjonen $F: I \to \mathbb{R}$ definert som

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leq x$$

integralet er definert ved hjelp av $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(t)\,dt$.

en antiderivert til f, med andre ord, $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$.

Hvis G er en antiderivert til f på $[a,b]$, $a < b$, $a, b \in I$, da er $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Viktig: dette gjelder både for funksjoner hvor vi kjenner en formel til en antiderivert,

for eksempel $f(t) = t^3$, da er $F(x) = \frac{1}{4}x^4$,

men også når vi ikke har en formel for en antiderivert,

for eksempel $f(t) = e^{-t^2}$, da er $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ er slik at $F'(x) = f(x)$.

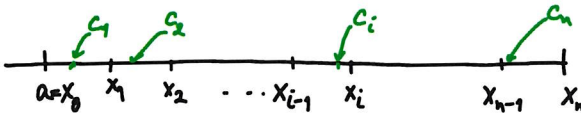
Kapittel 8.5 Riemann integralet. ②

Et nyttig alternativ til definisjonen av $\int_a^b f(x)dx$ vi ga som $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, når disse var lik hverandre.

→ Kall dette Darboux integralet.

Nå, gitt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ begrenset, la som før,

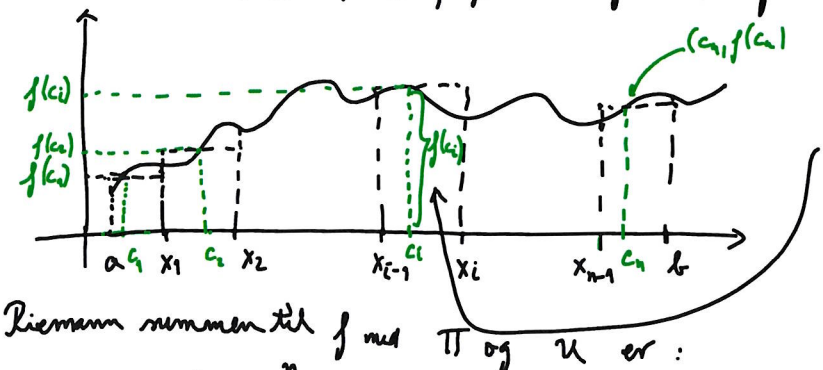
$\Pi = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ være en partisjon av $[a,b]$.



$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

For Velg $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, …, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, …, $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$.

Kalldet $\mathcal{U} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, for et utplukk av punkter for Π.



Rektangler med lengde for
basis: $x_i - x_{i-1}$
høyde: $f(c_i)$

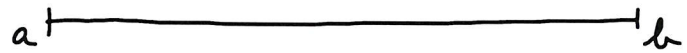
Riemann summen til f med Π og $\mathcal{U}$ er:

$$R(\Pi, \mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$ (summen av arealer til alle disse rektanglene)

Definerer nå: $|\Pi| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. (Den største lengde til delintervallene i partisjonen).

maksevidde ("norm") til Π

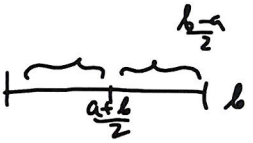
Eksempel: Π velges med punkter med samme avstand til hverandre. (3)



n: $\frac{b-a}{n} = (\Delta x)_n$

$n=1$, $\Pi_1 = \{a, b\}$, $\mathcal{U}_1 = \{a\}$

$n=2$, $\Pi_2 = \{a,\ a+\frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},\ b\}$, $\mathcal{U}_2 = \{a,\ a+(\Delta x)_2\}$



$n=3$, $\Pi_3 = \{a,\ a+\frac{b-a}{3} = a+(\Delta x)_3,\ a+2(\Delta x)_3,\ b\}$, $\mathcal{U}_3 = \{a,\ a+(\Delta x)_3,\ a+2(\Delta x)_3\}$

$\vdots$

$\Pi_n = \{a,\ a+(\Delta x)_n,\ a+2(\Delta x)_n, \ldots,\ b\}$, $\mathcal{U}_n = \{$alle venstre endepunkter$\}$

Har: $|\Pi_n| = (\Delta x)_n = \frac{b-a}{n}$. (For $a=0$, $b=1$, er $|\Pi_n| = \frac{1}{n}$ og $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$).

Generelt:

Definisjon 8.5.2 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ begrenset er Riemann-integrerbar dersom det finnes et tall α slik at for alle (vilkårlige) valg av partisjoner og utfyllinger $\{\Pi_n, \mathcal{U}_n\}$ hvor $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$, det gjelder at

$$\{R(\Pi_n, \mathcal{U}_n)\}_n$$

er konvergent med grense α. (For N_n, antallet av punkter i $\mathcal{U}_n$, så vier vi at $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha$.).

Teorem En begrenset funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er integrerbar i Darboux forstand hvis og bare hvis den er Riemann integrerbar. I så fall er

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, \mathcal{U}_n) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (= \alpha).$$

Setning 8.5.5 Hvis $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ er integrerbare, da er ④
$f+g$, $f-g$, og kf, k konstant, også integrerbare.

Spesielt: $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. (Tilsvarende for subtraksjon.)

$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Bevis: Vet: i HS. for et vilkårlig valg $\{\Pi_n, \mathcal{U}_n\}$, med $|\Pi_n| \to 0$,

da er $\lim_{n\to\infty} R_f(\Pi_n, \mathcal{U}_n) = \lim_n \sum_1^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$

og $\lim_{n\to\infty} R_g(\Pi_n, \mathcal{U}_n) = \lim \sum_1^n g(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)dx$.

Men $R_f(\Pi_n, \mathcal{U}_n) + R_g(\Pi_n, \mathcal{U}_n) = \sum_1^n (f(c_i) + g(c_i))(x_i - x_{i-1})$

$= f(c_i) + g(c_i) = (f+g)(c_i)$

$= R_{f+g}(\Pi_n, \mathcal{U}_n)$

→ konvergerer mot $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, så dette er det ønskede α fra def. av $f+g$ Riemann-integrerbar.

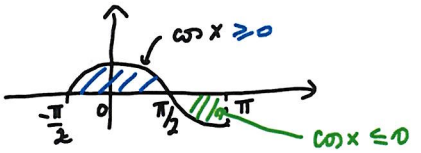
8.6 Anvendelser av integralet (5)

(I) Arealberegning.

Arealet av området begrenset av grafen til f (integrerbar), x-aksen, og de lodrette linjene $x=a$ og $x=b$ er A, gitt som:

- når $f(x) \geq 0$, $A = \int_a^b f(x)\,dx$.
- når $f(x) \leq 0$, $A = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-f(x))\,dx$ (Bruk $k=-1$ i Setning 8.5.5).

Eks: $f(x) = \cos x$ på $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$

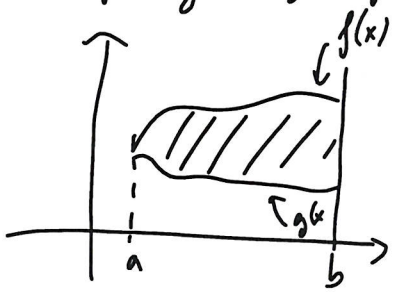


$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

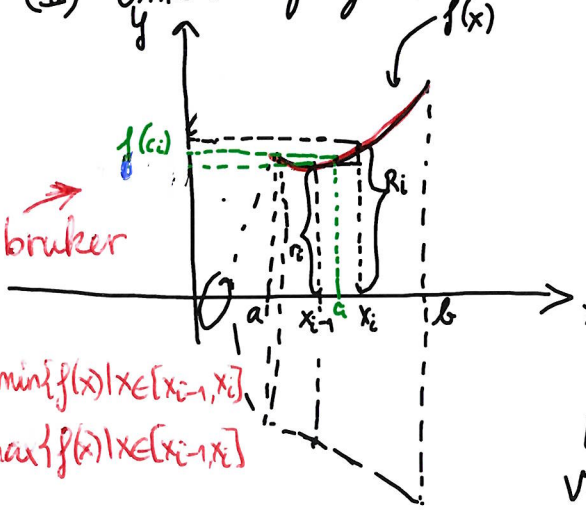
$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = 2(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2(1-0) - (0-1) = 3.$$

Mer avanserte eksempler: arealet av området begrenset av grafene til $f(x)$ og $g(x)$, og $x=a$, $x=b$, når for eksempel $f(x) \geq g(x)$ på $[a,b]$, er lik

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



(II) Omdreiningslegeme om x-aksen. Finn volumet. (6)



Her bruker vi

$r_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$R_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Bruk Riemann summer

$\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$

"lille" sylinder:
volume $\pi r_i^2 (x_i - x_{i-1})$

"stor" sylinder $\pi R_i^2 (x_i - x_{i-1})$



Legg sammen over alle delintervaller:
V = volumet vi er ute etter

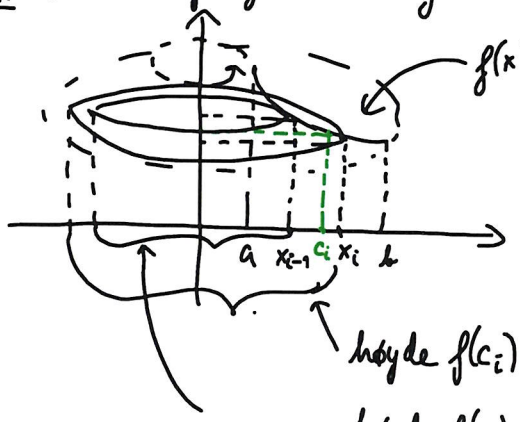
$$\sum_{i=1}^{n} \pi r_i^2 (x_i - x_{i-1}) \le V \le \sum_{i=1}^{n} \pi R_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

Blir trappesum til funksjonen $\pi f(x)^2$.

Vi velger $\{\Pi_n, \mathcal{U}_n\}$ med $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, \mathcal{U}_n) = \boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx \text{ når } f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ kontinuerlig og } f(x) \ge 0 \text{ på } [a,b].}$$

III Omdreiningslegeme om y-aksen. (7)



$f(x)$, antar $f(x) \geq 0$, kontinuerlig.

$c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

høyde $f(c_i)$, radius x_i, volum $\pi f(c_i)\, x_i^2$

høyde $f(c_i)$, radius x_{i-1}, volum $\pi f(c_i)\, x_{i-1}^2$

$V_i = \pi f(c_i) x_i^2 - \pi f(c_i) x_{i-1}^2 = \pi f(c_i) \cdot (x_i^2 - x_{i-1}^2)$

$= \pi f(c_i) \cdot \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot 2(x_i - x_{i-1})$

$= 2\pi f(c_i) \cdot c_i \, (x_i - x_{i-1})$ } Riemann sum til $2\pi f(x) \cdot x$

Velg $(\Pi_n, \mathcal{U}_n)$, med $|\Pi_n| \to 0$.

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

(IV) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ deriverbar med kontinuerlig $f'(x)$.

Lengden til grafen til f (buelengden) på intervallet $[a,b]$ er

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx .$$



