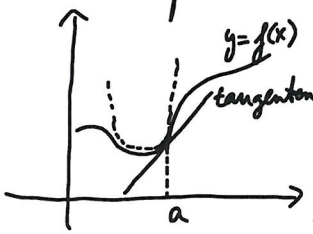
MAT1100 Forelesning 30 31/10/2024

(1)

Kapittel 11.1 Taylor polynomer.

Problemet vi ser på: bestemt approksimasjon av funksjoner med polynomer.

For f deriverbar i a.



Denne er gitt ved:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Sett $h(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Vi har: $h(a) = f(a) + f'(a)(a-a) = f(a)$.

Siden $h'(x) = f'(a)$ er $h'(a) = f'(a)$.

I alt:

$h(a) = f(a)$

$h'(a) = f'(a)$.

Kan vi gjøre tilsvarende med 2-grads polynom? Når vi antar f'' eksisterer.

Ser på $h(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$, $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ønsker: $h(a) = f(a)$ * (1). Har $h(a) = c_0$. Nok å velge $c_0 = f(a)$.

$h'(a) = f'(a)$ **

$h''(a) = f''(a)$ ***

$h'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)$,

$h''(x) = 2c_2$. Så $h'(a) = c_1$, $h''(a) = 2c_2$.

Ser, at $c_1 = f'(a)$ og $2c_2 = f''(a)$. Dermed $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$.

Det gir: $h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$.

Generelt: for en funksjon f som er n ganger deriverbar, finnes det et n-grads polynom h slik at:

$h(a) = f(a)$, $h'(a) = f'(a)$, $h''(a) = f''(a)$, $h'''(a) = f'''(a)$, $h^{(4)}(a) = f^{(4)}(a)$, ...

... $h^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$?

Så $h^{(k)}$ = deriverte av orden k, setter $h^{(0)} = h$.

31/10/2024 ②

For $h(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n$,

$c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

$h'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1}$ $(k=1)$

$h''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \dots + (n-1)\cdot n\, c_n(x-a)^{n-2}$ $(k=2)$

$h'''(x) = 2\cdot 3\cdot c_3 + 2\cdot 3\cdot 4(x-a) + \dots + (n-2)(n-1)n\, c_n(x-a)^{n-3}$ $(k=3)$

Det gjelder, at

$$h^{(k)}(x) = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k}_{k!}\, c_k + 2\cdot 3\cdot \dots \cdot (k+1)(x-a) + \dots + (n-(k-1))(n-(k-2))\dots n\, c_n(x-a)^{n-k}.$$

Så $h^{(k)}(a) = k!\, c_k$ for alle $k = 1, 2, \dots, n$.

Setning 11.1.1

Anta at f er n ganger deriverbar i a. Polynomet

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

er det eneste n-grads polynom slik at $h^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, for alle $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Kalles Taylor polynomet av grad n til f om punktet a.

Notasjon: $T_n f$, så $T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Merknad: $T_n f$ kan ha grad $\leq n$ (siden $f^{(n)}(a)$ trenger ikke være $\neq 0$).

Eksempler

① Taylor polynomet av grad n til $f(x) = e^x$ om $a = 0$.

Har $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(k)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$, så $f^{(k)}(0) = 1$, for $k = 0, 1, \dots, n$. Så:

$$T_n e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

31/10/2024

② $f(x) = \sin x$ om $a = 0$. ③

Har: $f(x) = \sin x$, så $f(0) = 0$.

$f'(x) = \cos x$, så $f'(0) = 1$.

$f''(x) = -\sin x$, så $f''(0) = 0$.

$f'''(x) = -\cos x$, og $f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ og $f^{(4)}(0) = 0$

0 i partall deriverte

veksler

→ starten for $T_n \cos x$

Herfra gjentas dette monotonet.

$$T_n \sin(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{0}{8!}x^8 + \cdots$$

$$T_{2n} \sin(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \left(T_4 \sin(x) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 \right).$$

Ser, at $T_{2n-1} \sin(x) = T_{2n} \sin(x)$, $n \geq 1$.

Analogt, for $f(x) = \cos x$, om $a = 0$, starter med $\cos 0 = 1$

$$T_n \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad T_{2n+1} \cos(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

Eksempel: Se på $f(x) = \ln x$ om $a = 1$ (Les Eksempel 11.1.5).

31/10/2024 (4)

Kap. 11.2 Taylor's formel med restledd.

For f slik at $f^{(k)}$, $k=1,\dots,n$ eksisterer og er kontinuerlige på $[a,b]$, vi ser på:

$$R_n f = f - T_n f \text{ , restleddet lastent av Taylor}$$

polynomet av grad n.

$n=1$: $T_1 f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

På $[a,b]$, av analysens fundamentalteorem, har vi

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt. \quad \text{Dvs} \quad = T_1 f(b) + \boxed{R_1 f(b)}$$

$$\int_a^b f'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{(t-b)'}_{=1} f'(t)\,dt = \quad \text{Bruk } u(t)=f'(t),\ v'(t)=1,\ v(t)=t-b.$$

$$= \Big[(t-b)f'(t)\Big]_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= \Big[\underbrace{(b-b)}_{=0} f'(b) - (a-b)f'(a)\Big] - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt.$$

$$= f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt.$$

Så er $f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a)}_{(T_1 f)(b)} + \boxed{\int_a^b f''(t)(b-t)\,dt.} \overset{\text{Dette er}}{=} (R_1 f)(b)$

§ Delvis integrasjon med $u(t)=f''(t)$, $v'(t)=b-t$, $u'(t)=f'''(t)$, $v(t)=-\frac{1}{2}(b-t)^2$.

Teorem 11.2.1

Anta at f og dens $n+1$ første deriverte eksisterer og er kontinuerlige på $[a,b]$. Da er

$$f(b) = \underbrace{f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt}_{\text{Dette er da } (R_n f)(b)}.$$

$$= (T_n f)(b)$$

Bevis: Induksjon. Vi har nettopp sett at det gjelder for $n=1$.

Anta vi: Anta for $n=k$, $f(b) = (T_k f)(b) + \frac{1}{k!}\boxed{\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k\,dt}$ Bruk delvis integrasjon

Sjekk at det gjelder

$$f(b) = \underbrace{(T_k f)(b) + \frac{f^{(k+1)}(b)}{k!}}_{(T_{k+1} f)(b)} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\,dt.$$

Ved induksjon, er (1) gjeldende for alle n.

↓ Rettes til $(k+1)!$

31/10/2024 (5)

Konklusjon: (brukes x)

$$(R_n f)(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

Konsekvenser:

① Korollar 11.22 Samme antakelser som i 11.2.1: for $[a, x]$, la M være slik at $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ på intervallet mellom a og x.

Da er $|(R_n f)(x)| \leq \frac{M}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} |x-a|^{n+1}$.

Lagranges restledd formel

② Antakelser som før: det finnes c mellom a og x slik at.

$(R_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^n$ ← Rettes til $n+1$.

Opps 11.2.1: $T_4 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

$|(R_4 f)(b)| = \left| \frac{e^c}{120} b^5 \right| \leq \left| \frac{e^b}{120} b^5 \right|$ på $(0, b)$

$n=4$, $x=b$, $a=0$, c fra Lagranges formelen. siden e^x voksende.