MAT 1100 Forelesning 21 3/10/2024 ①

Repetisjon til midtveiseksamen

Kapittel 8

① (Oppgave 8.4:2d).

Hva er $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$? Vi setter $u(x)=\sqrt{x}$ (eller $u=\sqrt{x}$).

$$\frac{du}{dx} = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Skriver $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = \int \frac{2du}{\cos^2 u} = 2\int \frac{1}{\cos^2 u}du = 2\int (\tan u)'du = 2\tan u + C$$

$$= 2\tan\sqrt{x} + C.$$

② Hva er $\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx = \int_0^1 \frac{1}{3}(x^3)' e^{x^3}dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (e^{x^3})'dx$$

$$= \frac{1}{3}(e^{x^3})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^1 - e^0) =$$

$$= \frac{1}{3}(e-1).$$

$(e^{x^3})' = e^{x^3}\cdot(x^3)'$

(($u=x^3$, $\frac{du}{dx}=3x^2$

$\int_0^1 x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^u du$))

Oppg. ⑲/2022 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(1+t^4)dt$

(Oppgave 8.3:6 Når $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$, $a\in\mathbb{R}$, så er $G'(x) = f(g(x))\,g'(x)$.)

Bruker dette med $f(t)=\sin(1+t^4)$, $g(x)=x^2$, $g'(x)=2x$. Får, at

$$F'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) = \sin(1+(x^2)^4)\cdot(2x) = 2x\sin(1+x^8). \quad \text{(Svar (C))}$$

Vet: Når $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, er $F'(x) = f(x)$. (på (a,b))

Hvis vi nå har $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$,

da er $F(g(x)) = G(x)$. Bruk kjerneregelen:

får $F'(g(x))\cdot g'(x) = G'(x)$, eller $f(g(x))\cdot g'(x) = G'(x)$.

(13)/2023 Hvis g er den omvendte funksjonen til $f(x) = (x^2+4x+6)e^x$, hva er $g'(6)$? (2)

Vet: når $y = f(x)$ er $g(y) = x$ og når $f'(x) \neq 0$ da er $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

$y=6$ svarer til x hvor $(x^2+4x+6)e^x = 6$. Ser at $x=0$ er slike at $f(0)=6$. Finner: $f'(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+6)e^x$

$= (2x+4+x^2+4x+6)e^x$

$= (x^2+6x+10)e^x$.

Da er $f'(0) = 10$ og $g'(6) = \frac{1}{10}$.

(17)/2023 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 1 & \text{når } x = 0 \end{cases}$. Hva er $f'(0)$?

Regner ut $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

l'Hôpital $= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x}$

l'Hôpital $= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$. Får $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(3)

(9)/2023 $\{a_n\}$ er gitt ved $a_0 = 6$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 14}{9} \text{ for } n \geq 1. \quad \text{Grensen er?}$$

Sjekker om følgen er monoton og opad eller nedad begrenset.

$a_0 = 6$, $a_1 = \frac{a_0^2 + 14}{9} = \frac{6^2 + 14}{9} = \frac{36 + 14}{9} = \frac{50}{9} < a_0$.

Vi viser ved induksjon at $\{a_n\}$ er avtagende.

P_n: $a_{n+1} < a_n$ for alle $n \geq 0$

P_0 gjelder. Antar P_k gjelder, så er $a_{k+1} < a_k$.

Ser om P_{k+1} gjelder: $a_{(k+1)+1} \overset{?}{<} a_{k+1}$ ↑ så dette gjelder.

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}^2 + 14}{9} < \frac{a_k^2 + 14}{9} = a_{k+1}$$

Er den nedad begrenset?

Hvis vi antar $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, så vil $a = \frac{a^2+14}{9}$. Løser $a^2 + 14 = 9a$,

eller $a^2 - 9a + 14 = 0$. Får $a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2}$

$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$ ↘ $a_1 = 7$, $a_2 = 2$. Muligheter for grenseverdien.

$a_0 = 6 > 2$, $a_1 = \frac{50}{9} > 2$.

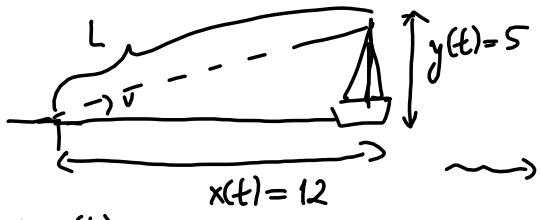
Vis ved induksjon at $a_n > 2$ for alle n:

antar $a_n > 2$, da er $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 14}{9} > \frac{2^2 + 14}{9} = \frac{18}{9} = 2$.

Ved resultat om (at en) avtagende, nedad begrenset følge er konvergent

får vi $a = \lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(12)/2023 (4)



$\rightsquigarrow$ $x'(t) = 2$ m/s, den kjente hastigheten.

$v = v(t)$.

$v'(t)$ = den ukjente hastigheden.

Hva holder $v(t)$ sammen med $x(t)$ og $x'(t)$?

Bruker, at $\cot v = \frac{x(t)}{y(t)}$, v endrer seg med t.

Ønsker relasjon mellom $v'(t)$ og $x'(t)$. Deriver på t i $\cot v = \frac{x(t)}{5}$,

$$\boxed{(\cot v)' = \frac{x'(t)}{5}}$$

Dette blir: $-\frac{1}{\sin^2 v} \cdot v'(t) = \frac{2}{5}$, så $v'(t) = -\frac{2}{5}\sin^2 v$.

Men $\sin^2 v = \frac{5}{L}$, hvor $L = \sqrt{5^2 + (12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ } Så

$$v'(t) = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5^2}{169} = -\frac{10}{169} \text{ rad/s}.$$

(11)/2023 $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$. Flytter grensen i eksponenten.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}$$

siden eksponensialfunksjonen er kontinuerlig.

når $x\to\infty$ går $\frac{1}{x}$ mot 0, og $\cos\frac{1}{x}$ går mot 1, dermed går $\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ mot 0.

I eksponenten: $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{x^{-2}}$ "$\frac{0}{0}$"

l'Hopital $= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}} \cdot \left(\cos\frac{1}{x}\right)'}{(-2x^{-2-1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2}) \cdot (-\sin\frac{1}{x})}{-2x^{-3}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\right)}_{1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Får: $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$.

($\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$)

↓ eller bruk l'Hopital.

⑤ 2023 $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ reellt polynom ⑤
$(a, b, c \in \mathbb{R})$.
$P(z)$ har i og -2 som røtter. Hva er $P(z)$?

Vet nå, siden P er reellt, at også $-i$ er en rot.

Fra algebraens fundamentalteorem vet vi nå at:

$$P(z) = (z-i)(z-\bar{i})(z-(-2))$$
$$= (z-i)(z-(-i))(z+2)$$
$$= (z-i)(z+i)(z+2)$$
$$= (z^2 - i^2)(z+2)$$
$$= (z^2+1)(z+2)$$
$$= z^3 + 2z^2 + z + 2$$

$\boxed{a = c = 2,\ b = 1}$

④ 2023 $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2i - 3| > 5\}$. Hva er dette?

Skriver dette som avstand: $|z - (3-2i)|$, $w = 3 - 2i$

z ligger utenfor sirkelen med sentrum $w = 3 - 2i$ og radius 5.

(Alternativt, $z = x + iy$, og omskriv:

$|z + 2i - 3| > 5$ til $|(x-3) + i(y+2)|^2 > 5^2$

eller $(x-3)^2 + (y+2)^2 > 5^2$

↑ ↑

senter $\boxed{(3, -2)}$, sirkel med radius 5

↳ $w = 3 - 2i$.