MAT 1100 Forelesning 31 4/11/2024 ①

Kapittel 11.3 Følger av funksjoner og deres konvergens.

- Eksempler
- Punktvis konvergens
- Uniform konvergens.

Eksempel: ser på $f(x) = \ln x$, og finner Taylor polynomene om 1.

- $f(x) = \ln x$ — $f(1) = 0$
- $f'(x) = x^{-1}$ — $f'(1) = 1$
- $f''(x) = (x^{-1})' = -x^{-2}$ — $f''(1) = -1$
- $f'''(x) = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$ — $f'''(1) = 2$
- $f^{(4)}(x) = (2x^{-3})' = 2\cdot(-3)x^{-4} = -2\cdot 3\, x^{-4}$ — $f^{(4)}(1) = -2\cdot 3 = -3! = (-1)\cdot 3!$
- $f^{(5)}(x) = -2\cdot 3\cdot(-4)\cdot x^{-5} = 2\cdot 3\cdot 4\, x^{-5}$ — $f^{(5)}(1) = 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$

Generelt er

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$. Vises ved induksjon. Så $\boxed{f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!}$

Vi får en følge av funksjoner $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, definert på $(0, \infty)$, ved å sette $f_n = T_n f$, $n \geq 1$. Så:

$f_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + (x-1) = x-1;$

$f_2(x) = x-1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2}.$

$f_3(x) = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$

...

$f_n(x) = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ ($n! = (n-1)!\cdot n$).

...

Spørsmål vi kan stille: kan vi definere konvergens av funksjonsfølger slik at i eksempelet ovenfor er $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$?

4/11/2024 (2)

Def 11.3.1 Gitt en følge $f_n: A \to \mathbb{R}$, A en delmengde av $\mathbb{R}$, $n \geq 1$, og gitt $f: A \to \mathbb{R}$, vi sier at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f på A dersom

(p.c.) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in A$. ($\{f_n(x)\}$ tallfølge)

Eksempel 1: Gitt $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 4x + \frac{3x^2}{n}$, for hvert $n \in \mathbb{N}$.
Er denne punktvis konvergent mot en f?

La $x \in \mathbb{R}$ være fast; $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(4x + \frac{3x^2}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} 4x + \lim_{n\to\infty} \frac{3x^2}{n}$ (x er en "konstant" i følgen)

$= 4x + 0 = 4x$.

Definer $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x$. Da er (p.c.) oppfyllet og $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f.

Eksempel 2 Gitt $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Vis, at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

La $x \in \mathbb{R}$, finner $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. ($1^\infty$ uttrykk)

Bruker: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]} = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Så nok å finne

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{\text{l'H}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{n^2}\cdot x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} x}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{x}{1} = x.$$ Tilbake til vårres $f_n(x)$!

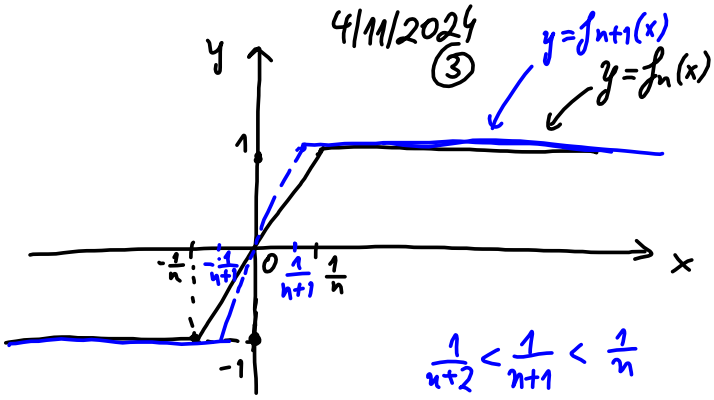
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^x$. Siden det er sant i et vilkårlig x, har vi punktvis konvergens.

Men: punktvis konvergens "husker" ikke noe om egenskapene til $\{f_n\}$.

4/11/2024 ③

Eksempel $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{for } -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \text{for } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$



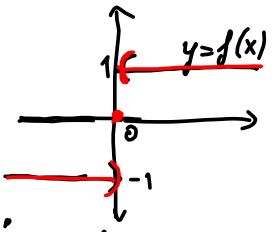
Når n øker nærmer grafen $y = f_n(x)$ seg y-aksen

Undersøker for punktvis konvergens. La $x \in \mathbb{R}$, for $x > 0$ finn N så $x > \frac{1}{N}$

Da er $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$; for $x < 0$ er $x < -\frac{1}{N}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1$;

for $x = 0$ er $f_n(x) = 0$ så $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Så $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$.



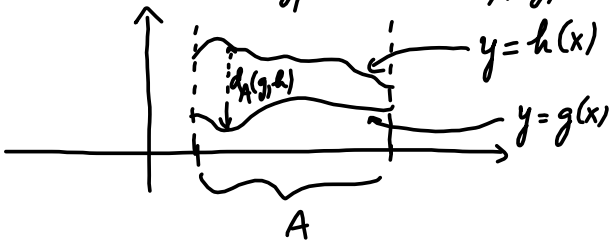
Vi ser: f_n er kontinuerlig; for hvert n.

for $x = \frac{1}{n}$ $\lim_{x\to\frac{1}{n}^+} f_n(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} 1 = 1 = \lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n})$, tilsvarende i $x = -\frac{1}{n}$.

Men, f er ikke kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

Uniform konvergens:

11.3.5 Gitt g, h definert på A, avstanden mellom g og h defineres som $d_A(g,h) = \sup\{|g(x) - h(x)| \mid x \in A\}$. I tilfelle avstanden kan bli så stor som mulig, settes $d_A(g,h) = \infty$.



4/11/2024 ⑨

Def 11.3.6 $f_n: A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f: A \to \mathbb{R}$.

$\{f_n\}$ **konvergerer uniformt mot f på A**

dersom $\lim_{n\to\infty} d_A(f_n, f) = 0$.

Merknad:

(a) ε-definisjon av unif. konv.: skal uttrykke at $\{d_A(f_n, f)\}$ konvergerer mot 0 når $n \to \infty$.

gitt $\varepsilon > 0$, det finnes $N' \in \mathbb{N}$ (avhenger av ε) slik at

for $n \geq N'$ er $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for alle $x \in A$.

ε-definisjon av punktvis konvergens: $\{f_n\}$ mot f

(A)

gitt x, gitt $\varepsilon > 0$, det finnes N (avhenger av x og ε) slik at

for $n \geq N$ er $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Eksempel: ① $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $A = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. ($f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \frac{\sin 2x}{2}$, ...).

Merk: $|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n}$, for alle x. Sjekker om $\{f_n(x)\}$ konvergerer uniformt mot $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Sjekker: gir $\varepsilon > 0$, finnes $N' \in \mathbb{N}$ så $\varepsilon > \frac{1}{N'}$ for $n \geq N'$ er

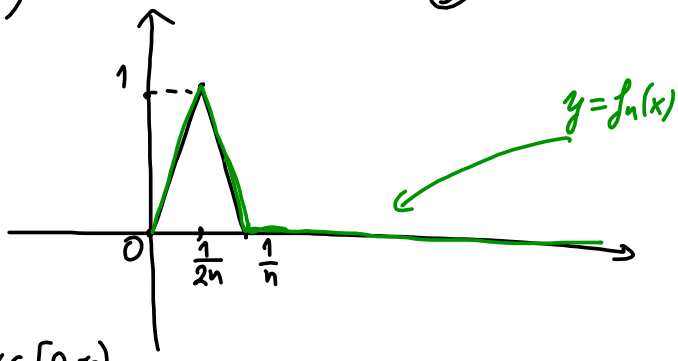
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N'} < \varepsilon, \text{ for alle } x \in \mathbb{R}.$$

4/11/2024 (5)

Eksempel (ikke unif. konv men punktvis konv. OK.)

$A = [0, \infty)$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -2nx+2, & \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$



$\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$:

i $x = 0$, $f_n(x) = 2n \cdot 0 = 0$, så $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. ✓

for $x > 0$, finner N så $x > \frac{1}{N}$ (Arkimedes prinsipp): for $n \ge N$ er $x > \frac{1}{N} \ge \frac{1}{n}$.

Har $f_n(x) = 0$, så $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. ✓

Ikke uniformt konvergent: velger $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dersom vi hadde uniformt konv, finnes $N' \in \mathbb{N}$ så $n \ge N'$ medfører $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$, for alle $x \ge 0$.

La $n = 2N'$, $x = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(2N')}$. Da er $|f_n(x)| = |2 \cdot 2N' \cdot \frac{1}{2(2N')}| = 1$, som ikke er $< \frac{1}{2}$.

Teorem 11.3.8 Gitt $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ definert på A, anta at

(i) f_n kont. på A, alle $n \ge 1$,

(ii) $\{f_n\}$ konv. uniformt mot f.

Da er f kontinuerlig.

Bevis: $\frac{\varepsilon}{3}$-teknikk. (vi gjør det ikke nu).

4/11/2024 (6)

Kap. 11.4

1) Dersom $\{f_n\}$ konvergerer mot f $\longrightarrow$, og er kontinuerlige, har vi (1) $\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$?

Setning 11.4.1 Når f_n er kontinuerlige på $[a,b]$ og $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f på $[a,b]$, er (1) sant:

for $c\in[a,b]$ er $\lim_{n\to\infty} \boxed{\int_c^x f_n(t)\,dt} = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt$

$\boxed{\int_c^x f_n(t)\,dt} = g_n(x)$, $\int_c^x f(t)\,dt = g(x)$, uniformt konv.

Bevis Antar $a<b$. Gitt $\varepsilon>0$, av unif. konvergens finnes det $N\in\mathbb{N}$ slik at $n\geq N$ medfører $|f_n(t)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, for alle $t\in[a,b]$.

$$|g_n(x)-g(x)| = \left|\int_c^x f_n(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x (f_n(t)-f(t))\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_c^x |f_n(t)-f(t)|\,dt\right| < \left|\int_c^x \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt\right| = \frac{\varepsilon}{b-a}\left|\int_c^x 1\cdot dt\right| < \varepsilon$$

for $n\geq N$ og for alle $x\in[a,b]$. ∎

$\rightsquigarrow$ Setning 11.4.3 (senere).