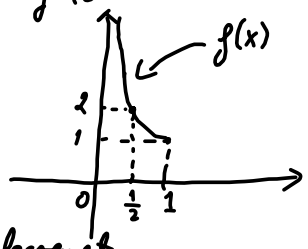
MAT1100 Forelesning 10 ①

Kapittel 5.3

Eksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$




Med $D_f = (0, 1]$ er $f$ ikke begrenset.

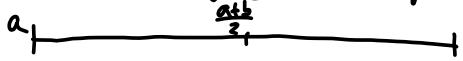
Med $D_f = [\frac{1}{2}, 1]$ er $f$ begrenset: minimumsverdi $f(1) = 1$.
maksimumsverdi $f(\frac{1}{2}) = 2$.

**Setning 5.3.2** Gitt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig, da er $f$ begrenset.

(Det finnes et $M > 0$ så $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in [a, b]$.)

Vi antar $a < b$.

**Bevis** Vi antar at $f$ ikke er begrenset. Vi skal utlede en motsigelse.




Trin 1: $[a,b]$ halveres: $[a, \frac{a+b}{2}]$ og $[\frac{a+b}{2}, b]$. Da kan ikke $f$ være begrenset på begge disse intervallene, vi velger det ene hvor $f$ ikke er begrenset. Antar $f$ ikke begrenset på $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Skriver som $[a_1, b_1]$, hvor $a_1 \geq a$ (med det andre intervallet, er også $\frac{a+b}{2} \geq a$)
og ser at det har lengde $\frac{1}{2}(b-a)$.

Trin 2: $[a_1, b_1]$ halveres




. Som ved trin 1, kan vi velge $[a_2, b_2]$ blant $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ s.a. $f$ ikke er begrenset her. Har $a_2 \geq a_1$ og $[a_2, b_2]$ har lengde $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(b-a)) = \frac{1}{2^2}(b-a)$.

Trin n: $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ halveres, får $[a_n, b_n]$ hvor $f$ ikke er begrenset, med lengde $\frac{1}{2^n}(b-a)$ og $a_n \geq a_{n-1}$.

.

(2)

$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \dots$

↗ $f$ ikke begrenset på noen av disse intervallene.

Her: $\{a_n\}$ er voksende og begrenset følge.
Av teorem 4.3.9 er den konvergent. La $c = \lim_n a_n$, $c \in [a,b]$.

Av $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$ får vi $b_n = a_n + \frac{1}{2^n}(b-a)$.

$$\text{Da er } \lim_n b_n = \lim_n a_n + \underbrace{\lim_n \frac{1}{2^n}}_{=0}\cdot(b-a) = c.$$

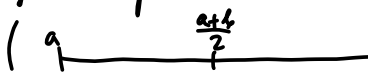
Da $f$ er kontinuerlig på $[a,b]$ er den kont. i $c$.
Siden $f$ er ubegrenset på $[a_n,b_n]$, for hvert $n \geq 1$ finnes det $c_n \in [a_n,b_n]$ så $|f(c_n)| \geq n$. ⊗ Så $\lim_{n\to\infty} |f(c_n)| = \infty$.
Her $a_n \leq c_n \leq b_n$, for alle $n \geq 1$. Av skviseloven er $\{c_n\}$ konvergent og $c_n \to c$ for $n \to \infty$. Av kontinuitet i $c$ vil $f(c_n) \to f(c)$ for $n \to \infty$ (⊗) Motsigelse, siden $f(c) \in \mathbb{R}$.
Dermed er $f$ begrenset på $[a,b]$.

**Teorem 5.3.3** (Ekstremalverdisetningen)
Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Det finnes minst et $c \in [a,b]$ s.a. $f(c) = M$ og minst et $d \in [a,b]$ s.a. $f(d) = m$, hvor $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ og $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

*Bevis:* Ideen: som i forrige bevis, men vi gjør direkte.
Velger nye intervallene

$$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \dots$$

hvor $a_1 \leq a_2 \leq \dots$, lengden til $[a_n,b_n]$ er $\frac{1}{2^n}(b-a)$, og $f$ har supremum $M$ over hvert av intervallene.




($f$ har supremum $M$ på minst et av disse).

(3)

Som før: $\{a_n\}$ voksende, begrenset.

Vi har $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ i $[a,b]$ av teorem 4.3.5.

Som før $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

Siden M er supremum til $f$ på hvert $[a_n, b_n]$, er ikke $M - \frac{1}{n}$ en øvre skranke for $\{f(x) \mid x \in [a_n, b_n]\}$.

Så vi får $c_n \in [a_n, b_n]$ slik at $f(c_n) > M - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

Skviseloven gir $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, kontinuitet til $f$ gir $\lim_n f(c_n) = f(c)$. Derfor er $f(c) \geq M$

Men M var supremum, så $f(c) \leq M$. } Vi får $f(c) = M$, som ønsket.

Bevist for at $f(d) = m$ i et punkt er lignende. ∎

Eksempel $f(x) = \frac{x^3 + \cos(\sqrt{x^6+23})}{x^2+7}$ på $[-1, 2]$.

Vis at $f$ antar et maksimumsverdi (og minimumsverdi).

Løsning: $f$ er satt sammen av kontinuerlige funksjoner, så den er kontinuerlig på $[-1, 2]$. Ekstremalverdisetningen sikrer da at $f$ antar et maksimumsverdi (og minimumsverdi).

Eksempel på skjæringsteoremet ($f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig og antar $f(a)$ og $f(b)$ med motsatt fortegn, da finnes minst et $c \in [a,b]$ så $f(c) = 0$.)

Vis at det finnes et $x$ i $[-2, 1]$ slik at $\ln(x^2+1) = -x$.

Løsning: Sett $f(x) = \ln(x^2+1) + x$. Regner ut $f(-2) = \ln 5 - 2 < 0$

og $f(1) = \ln 2 + 1 > 0$.

Anvend skjæringsteoremet: det finnes $x$ hvor $f(x) = 0$.

§ (4)

## Kapittel 5.4 Grenseverdier

Motivasjon (for eksempel) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

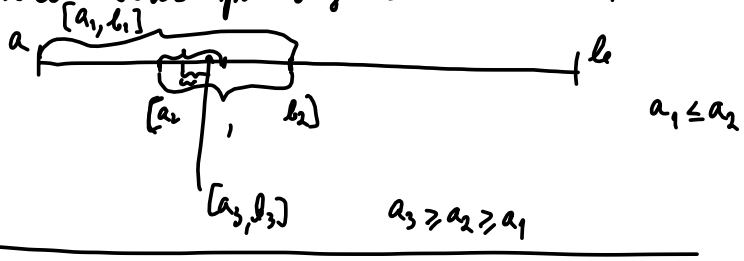
Her er ikke $\frac{\sin x}{x}$ definert i 0.

Generelt, vi sier at $f$ er definert i nærheten av et punkt $a$ dersom det finnes $b$ og $c$ med $b < a < c$ (eller $a \in (b, c)$) slik at $f$ er definert i intervallet $(b, c)$, unntatt muligens i $a$.

Eks: • $\frac{\sin x}{x}$ er definert i nærheten av 0.

• $x \sin \frac{1}{x}$ — " — — " — 0.

Litt tilbakeblikk på valget av intervaller:



(5)

**Definisjon 5.4.1**

Anta at $f$ er definert i nærheten av $a$.

Vi sier at $\lim_{x\to a} f(x) = L$, hvor $L \in \mathbb{R}$, dersom for ethvert $\varepsilon > 0$, finnes det et $\delta > 0$ slik at

når $0 < |x-a| < \delta$ er $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(Merk: vi krever at $x \neq a$)

Eksempel: Vis at $\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$ ved hjelp av definisjonen.

Gitt $\varepsilon > 0$, ønsker et $\delta$ så $0 < |x-9| < \delta$ sikrer at $|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$.

Setter $h = x - 9$, så $x = h + 9$. Setter inn:

$$|\sqrt{x} - 3| = |\sqrt{h+9} - 3| = \left| \frac{(\sqrt{h+9} - 3)(\sqrt{h+9} + 3)}{\sqrt{h+9} + 3} \right|$$ (Vi ganger med det konjugerte uttrykket).

$$= \frac{|(\sqrt{h+9})^2 - 3^2|}{\sqrt{h+9} + 3} = \frac{|h+9-9|}{\sqrt{h+9} + 3} = \frac{|h|}{\sqrt{h+9} + 3}$$. Hvordan kan $|h|$ gjøres liten slik at $\frac{|h|}{\sqrt{h+9} + 3}$ gjøres mindre enn $\varepsilon$?

Siden $\sqrt{h+9} + 3 > 3$ er $\frac{1}{\sqrt{h+9} + 3} < \frac{1}{3}$. Så

$|\sqrt{x} - 3| < \frac{|h|}{3} \overset{?}{<} \varepsilon$. Velger $\delta = 3\varepsilon$.

Når $0 < |h| < \delta = 3\varepsilon$ er $\frac{|h|}{3} < \varepsilon$ og $|\sqrt{x} - 3| < \frac{|h|}{3} < \varepsilon$.

5.4.3 Regneregler

Gitt $f, g$ definert i nærheten av $a$, anta at $\lim_{x\to a} f(x) = F$, og $\lim_{x\to a} g(x) = G$. Da er

$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = F \pm G$ og

$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = FG$.

Dersom $G \neq 0$ har vi også $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$.

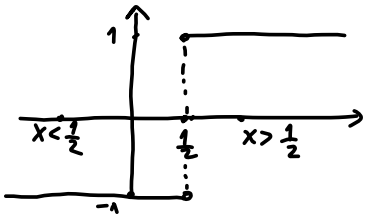
Eksempel: Regn ut $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x}{x^3+2}$.

Først, $\lim_{x\to 1}(x^2-5x) = \lim_{x\to 1} x^2 - 5\lim_{x\to 1} x = 1-5 = -4$,

så $\lim_{x\to 1}(x^3+2) = \lim_{x\to 1} x^3 + 2 = 3$. Altså er $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x}{x^3+2} = -\frac{4}{3}$.

Eksempel: $f(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1}$, $a = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2x-1}, & \text{når } x > \frac{1}{2} \\ \frac{-(2x-1)}{2x-1} & \text{når } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$




Eller, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x > \frac{1}{2} \\ -1 & \text{når } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Hva er $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$? Vi definerer grense fra neden (venstre) og fra oven (høyre)

**Def:**

Grense ovenfra ( $a \leftarrow x$ ): $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ betyr at for ethvert $\varepsilon > 0$ det finnes et $\delta > 0$ s.a. $a < x < a+\delta$ medfører at $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Grense nedenfra ( $x \rightarrow a$ ): $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ betyr at for ethvert $\varepsilon > 0$ finnes det $\delta > 0$ slik at når $a - \delta < x < a$, da er $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = 1$ og $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -1$ i eksempelet over.

(7)

Merk: $f$ med $D_f = [a_1, a_2]$ er kontinuerlig i $a \in (a_1, a_2)$ dersom $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$




Hvis ⊛ holder $f$ kontinuerlig i $a$ fra høyre.

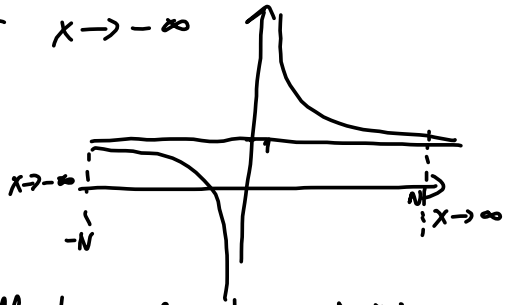
Hvis ⊜ — " — " — fra venstre.

---

Grenser når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$

Eks: $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

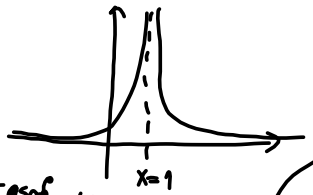



**Def:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ dersom til ethvert $\varepsilon > 0$ finnes det et $N \in \mathbb{N}$ s.a. når $x \geq N$ er $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ — " — " — finnes det et $N \in \mathbb{N}$ s.a. når $x \leq -N$ er $|f(x) - b| < \varepsilon$.

**Def:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dersom til ethvert $N \in \mathbb{N}$ finnes det $\delta > 0$ så $0 < |x - a| < \delta$ medfører at $f(x) \geq N$. } (⊛⊛)

$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$




$\lim_{x \to a^+} f(x)$ og $\lim_{x \to a^-} f(x)$ er også $+\infty$.

**Def:** $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ som i (⊛⊛) med $f(x) \leq -N$.

$\ln x$: $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

